

LOUISE REIPS

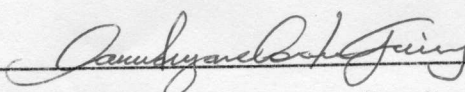
# CAMPOS VETORIAIS NO PLANO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura  
Departamento de Matemática  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Gustavo Adolfo T. F. da Costa

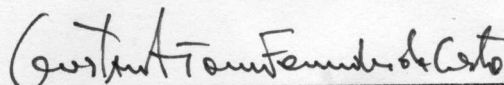
Florianópolis  
Fevereiro 2006

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 07/CCM/06.



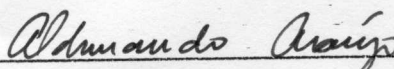
Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

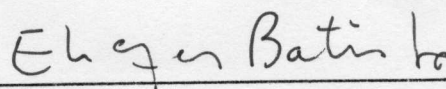


GUSTAVO ADOLFO T. F. DA COSTA

Orientador



ALDROVANDO LUÍS AZEREDO ARAÚJO



ELIEZER BATISTA

# Sumário

Introdução . . . . .	4
<b>1 <i>Funções e Campos Vetoriais</i></b>	<b>5</b>
1.1 Definição e exemplos . . . . .	5
1.2 Curvas Paramétricas no Plano . . . . .	6
1.3 Campos Vetoriais . . . . .	13
<b>2 Operadores Diferenciais</b>	<b>18</b>
2.1 Gradiente . . . . .	18
2.2 Rotacional . . . . .	22
2.3 Divergência . . . . .	27
<b>3 Linhas de Fluxo</b>	<b>31</b>
3.1 Linhas de Fluxo . . . . .	31
<b>4 <i>Integrais de Linha e Teoremas Integrais</i></b>	<b>42</b>
4.1 Integrais de Linha . . . . .	42
4.2 <b>Teoremas Integrais</b> . . . . .	45
4.2.1 Teorema de Green no plano . . . . .	45
4.2.2 Teorema de Stokes no plano . . . . .	47
4.2.3 Teorema da Divergência (ou de Gauss) no plano . . . . .	49
<b>5 <i>Campos Conservativos</i></b>	<b>54</b>
5.1 Definição . . . . .	54
5.2 Integral de Linha de um Campo Conservativo . . . . .	56
<b>Apêndice</b>	<b>67</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>68</b>

# Introdução

O cálculo vetorial é uma área de grande importância para a matemática pura e aplicada, relacionada à análise real de vetores em uma ou mais dimensões.

O estudo sobre cálculo vetorial abrange campos vetoriais, que são funções que associam vetores a pontos do espaço. Os vetores, por sua vez, representam grandezas vetoriais que são inerentes a um sentido e a uma direção. Entre as diversas aplicações eles desempenham o papel de forças que atuam num corpo, as velocidades no escoamento de um líquido, as intensidades de um campo elétrico variável etc, sendo assim, muito utilizados na física (principalmente na Mecânica Clássica) e engenharias.

No primeiro capítulo estudaremos funções, campos vetoriais e um pouco sobre curvas paramétricas, apresentando definições e exemplos. No segundo capítulo apresentamos os operadores gradiente, rotacional e divergente apresentando como exemplos algumas aplicações. No capítulo três trabalhamos com linha de fluxo, apresentando a equação da continuidade.

Já o capítulo quatro é formado por integrais de linha e os teoremas integrais, ou seja, de Gauss (1777-1855), Green (1793-1841) e Stokes (1819-1903) .

Gauss desenvolveu e provou o Teorema da Divergência enquanto trabalhava na teoria de gravitação, também conhecido como Teorema de Gauss. O Teorema da Divergência é utilizado como uma ferramenta para tornar integrais de volume em integrais de superfície.

O trabalho de George Green também é de grande importância no estudo do cálculo, elaborando o conhecido Teorema de Green. Green estudou sobre os fundamentos matemáticos da gravitação, da eletricidade e do magnetismo. George Stokes aplicou o cálculo de várias variáveis para estudar hidrodinâmica, elasticidade, luz, gravitação, som, calor, meteorologia e física solar.

No último capítulo definimos e apresentamos exemplos de campos conservativos. Enfim, segue o trabalho.

# Capítulo 1

## *Funções e Campos Vetoriais*

Neste capítulo estudaremos curvas paramétricas no plano, campos e funções vetoriais, apresentando definições e exemplos.

### 1.1 Definição e exemplos

**Definição 1.1.** Indica-se por  $\mathbb{R}^2$  o conjunto dos pares ordenados  $(x_1, x_2)$  de números reais. Vamos dotar o  $\mathbb{R}^2$  com a estrutura de um espaço vetorial real com as operações usuais de adição de pares ordenados e multiplicação por um número real. Definimos neste espaço um produto interno ou escalar dado por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (1.1)$$

para  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  quaisquer. Este produto escalar induz a seguinte norma no  $\mathbb{R}^2$ , chamada de norma euclidiana:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (1.2)$$

O conjunto  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , onde

$$\vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1) \quad (1.3)$$

é uma base do espaço  $\mathbb{R}^2$ , chamada de base canônica. Em termos desta base, qualquer elemento  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  pode ser expresso como

$$x = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \quad (1.4)$$

**Definição 1.2.** Uma função  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\Omega$  é um subconjunto não-vazio do  $\mathbb{R}^2$ , é chamada de uma função real a 2 variáveis. Esta função associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$  um único valor real  $y = f(x) \in \mathbb{R}$ . Este valor também é indicado por  $y = f(x_1, x_2)$ .

**Exemplo 1.1.** A função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , tem o domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,

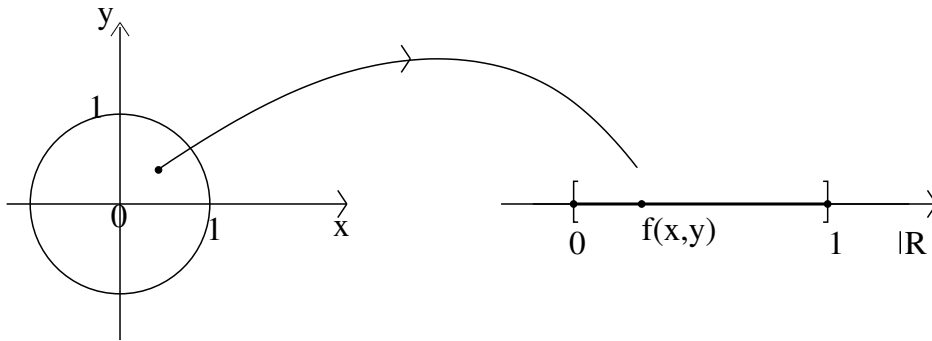


Figura 1.1

e o conjunto imagem  $[0,1]$ . Ver Figura 1.1.

**Definição 1.3.** Sejam  $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $n = 1$  ou  $2$  e  $i = 1, 2$ , duas funções reais a  $n$  variáveis reais. Uma função  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (1.5)$$

é chamada de uma função de várias variáveis a valor vetorial no  $\mathbb{R}^2$ , ou simplesmente, de uma função vetorial. Esta função associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1$  ou  $2$ , um ponto  $F(x) \in \mathbb{R}^2$ . As funções  $f_1, f_2$  são chamadas de funções coordenadas da função  $F$ . Na base canônica podemos expressar qualquer função  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por (1.5), por

$$F(x) = f_1(x) \vec{e}_1 + f_2(x) \vec{e}_2 \quad (1.6)$$

## 1.2 Curvas Paramétricas no Plano

Uma classe importante de funções vetoriais é aquela formada pelas curvas.

**Definição 1.4.** Chama-se curva paramétrica à aplicação  $\gamma$  que associa a cada ponto  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo, um único ponto  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ , cujas coordenadas  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  são funções reais de  $t$ . A imagem da aplicação  $\gamma$  é chamada de traço. A variável  $t$  é chamada de parâmetro da curva.

Uma curva paramétrica, portanto, é um caso especial de função vetorial, pois é uma função de uma variável real ( $n = 1$ ) a valores vetoriais no  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.2.** Seja  $\gamma(t) = (t, \arctg(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Para cada  $t$ ,  $\gamma(t)$  é um ponto do  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= \arctg(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Podemos expressar  $y$  em termos de  $x$  para obter  $y(x) = \arctg(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Assim o traço de  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  coincide com o gráfico da função  $\arctg(x)$ , como mostra a Figura 1.2.

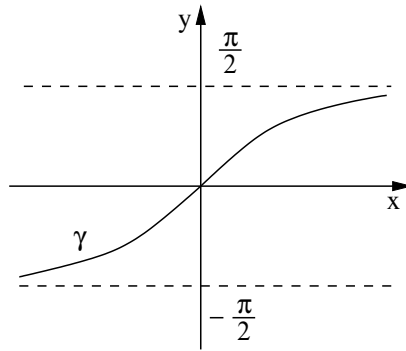


Figura 1.2

**Exemplo 1.3.** Considere a curva  $\delta(\theta) = (\theta^3, \arctg(\theta^3))$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , com coordenadas

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \theta^3 \\ y(\theta) &= \arctg(\theta^3) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Expressando  $y$  em termos de  $x$ , descobre-se que a curva  $\delta$  tem o mesmo traço da curva  $\gamma$  do exemplo anterior, mas as aplicações são diferentes pois os parâmetros e as funções coordenadas de  $\gamma$  e  $\delta$  são diferentes.

Como as aplicações  $\gamma$  e  $\delta$  tem o mesmo traço é comum referir-se a  $\gamma(t)$  e a  $\delta(\theta)$  com parametrizações distintas do mesmo conjunto de pontos que forma o traço de  $\gamma$  e  $\delta$ .

**Exemplo 1.4.** Considere as curvas  $\gamma(t) = (t, 2t), t \in [0, 1]$  e  $\delta(s) = (2s + 1, 4s + 2), s \in [-\frac{1}{2}, 0]$ . Ambas as curvas tem o mesmo traço que é o segmento de reta mostrado na Figura 1.3.

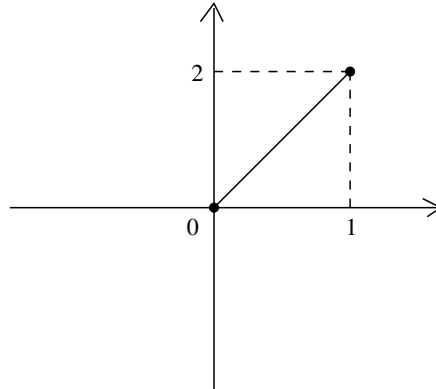


Figura 1.3

De fato, tomando  $x = t$  e  $y = 2t$ , segue que  $y = 2x, x \in [0, 1]$ . Da mesma forma, para  $x = 2s + 1$  e  $y = 4s + 2$ , obtemos  $y = 2x, x \in [0, 1]$ . Portanto, as funções  $\gamma(t)$  e  $\delta(s)$  são duas parametrizações distintas, com parâmetros  $t \in [0, 1]$  e  $s \in [-\frac{1}{2}, 0]$ , do mesmo conjunto de pontos que formam o segmento de reta da figura.

**Definição 1.5.** A orientação de uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o sentido no qual os pontos do traço de  $\gamma$  são percorridos à medida que o parâmetro  $t$  de  $\gamma$  varia no intervalo  $I$ , no sentido crescente dos seus valores.

**Exemplo 1.5.** À medida que o parâmetro  $t$  toma valores no sentido crescente de 0 a 1, os pontos  $\gamma(t) = (t, 2t)$  são percorridos no sentido indicado pela seta na Figura 1.4:

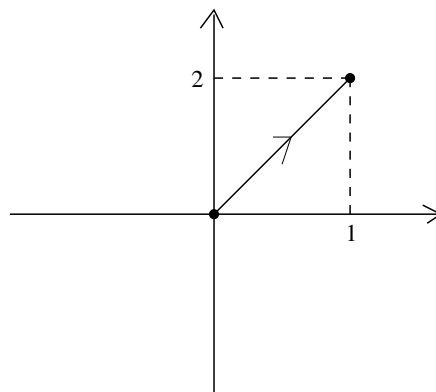


Figura 1.4

Note que as coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  crescem com  $t$ . Considere, agora, a curva  $\delta(\theta) = (-\theta, -2\theta), \theta \in [-1, 0]$ , cujo traço é o mesmo da curva  $\gamma$ . Contudo, quando



$\theta = -1$ ,  $\delta(-1) = (1, 2)$  e, quando  $\theta = 0$ ,  $\delta(0) = (0, 0)$ . Os pontos do traço são percorridos no sentido decrescente de suas coordenadas, quando  $\theta$  cresce de -1 a 0, como indica a seta na Figura 1.5.

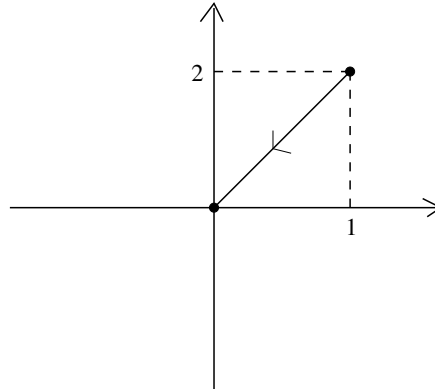


Figura 1.5

Portanto, a orientação é uma propriedade da parametrização do traço e não uma propriedade intrínseca do mesmo.

**Definição 1.6.** *Sejam  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas curvas com o mesmo traço. Uma função  $g : I_2 \rightarrow I_1$ , bijetora e de classe  $C^1$ , cuja inversa também é de classe  $C^1$  e tal que*

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ g \quad (1.9)$$

*é chamada de “mudança de parâmetro” ou “reparametrização”. Diz-se também que  $\gamma_2$  é uma reparametrização da curva  $\gamma_1$ , pela função  $g$ .*

**Exemplo 1.6.** No exemplo 1.5, a curva  $\delta(s)$  pode ser obtida de  $\gamma(t)$  pela reparametrização  $t = g(s) = 2s + 1$ . De fato, a função  $g$  é bijetora e de classe  $C^1$  e sua inversa,  $s = g^{-1}(t) = \frac{t-1}{2}$ , também. Além disso,

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \gamma(g(s)) \\ &= \gamma(2s + 1) = (2s + 1, 4s + 2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

As curvas  $\gamma$  e  $\delta$  tem a mesma orientação como é fácil verificar. Nesse caso, portanto, a reparametrização de  $\gamma$  manteve a orientação desta curva. Inversamente, obtém-se  $\gamma(t)$  por uma mudança de parâmetro em  $\delta(s)$ :

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \delta(g^{-1}(t)) \\
&= \delta\left(\frac{t-1}{2}\right) = (t, 2t)
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

Lembrando que uma curva  $\gamma$  é uma função vetorial e como  $\gamma(t)$  é um ponto do  $\mathbb{R}^2$ , para cada  $t$ , podemos interpretar  $\gamma(t)$  como sendo um vetor, indicado por  $\vec{\gamma}(t)$ , chamado de vetor posição, cuja origem é a origem do sistema de coordenadas e extremidade é o ponto  $\gamma(t)$ , para cada  $t$ , como ilustra a Figura 1.6.

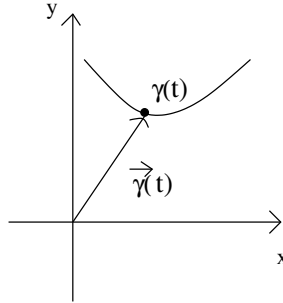


Figura 1.6

As componentes deste vetor são as componentes da função  $\gamma(t)$ . À medida que  $t$  varia no intervalo  $I$ , a extremidade do vetor posição percorre o traço de  $\gamma$ .

**Definição 1.7.** A derivada de uma curva  $\gamma$  no ponto  $t_0 \in I$ , é definida por

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}
\tag{1.12}$$

desde que o limite exista.

O vetor  $\vec{\gamma}'(t_0)$  tem uma interpretação geométrica interessante. É tangente à curva no ponto  $\gamma(t_0)$ . Para entendermos isso, considere uma curva no  $\mathbb{R}^2$  como mostra a figura abaixo:

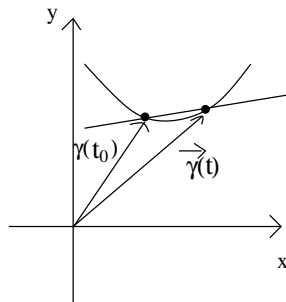


Figura 1.7

Como um vetor, podemos interpretar  $\vec{\gamma}(t) - \vec{\gamma}(t_0)$  como o vetor cuja origem e extremidade são os pontos  $\gamma(t_0)$  e  $\gamma(t)$  do traço de  $\gamma$ , respectivamente. A reta que contém  $\vec{\gamma}(t) - \vec{\gamma}(t_0)$  aproxima-se da reta tangente à curva no ponto  $\gamma(t_0)$  no limite  $t \rightarrow t_0$ . Supondo que  $\gamma$  é derivável, isto é, o limite (1.12) existe, então podemos entender o vetor  $\vec{\gamma}(t_0)$  como sendo um vetor tangente à curva no ponto  $\gamma(t_0)$ .

**Definição 1.8.** *Sejam  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \Omega$  duas curvas de classe  $C^1$ . Suponha que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tem o mesmo traço. Sejam  $\vec{\gamma}_1'(t)$  e  $\vec{\gamma}_2'(s)$  os vetores tangentes às curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  nos pontos  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(s)$ , respectivamente. Seja  $g : I_2 \rightarrow I_1$  uma função mudança de parâmetro.*

a) *Diz-se que  $g$  preserva a orientação de  $\gamma_1$  quando o vetor  $\vec{\gamma}_2'(s)$  tem o mesmo sentido e direção do vetor  $\vec{\gamma}_1'(t)$  em todo ponto  $P$  do traço tal que  $\gamma_2(s) = \gamma_1(g(s))$ . Ver Figura 1.8.*

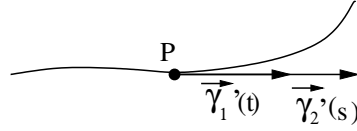


Figura 1.8

b) *Diz-se que  $g$  inverte a orientação de  $\gamma_1$  quando o vetor  $\vec{\gamma}_2'(s)$  tem a mesma direção mas o sentido contrário do vetor  $\vec{\gamma}_1'(t)$ , em todo ponto  $P$  do traço, tal que  $\gamma_2(s) = \gamma_1(g(s))$ . Ver Figura 1.9.*

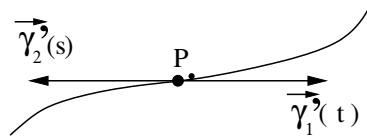


Figura 1.9

**Teorema 1.1.** *Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  duas curvas nas condições da definição 1.8. Seja  $g$  uma função mudança de parâmetro. Então:*

- a)  *$g$  preserva a orientação se  $g' > 0$  em todo ponto do seu domínio.*
- b) *Caso contrário, se  $g' < 0$  em todo ponto do seu domínio.*

**Prova:** Temos que  $\gamma_2(s) = \gamma_1(g(s))$ , para todo  $s \in I_2$ . Usando a regra da cadeia, obtém-se que

$$\vec{\gamma}_2'(s) = \vec{\gamma}_1'(g(s)) \cdot g'(s) \quad (1.13)$$

Segue que  $\vec{\gamma}_2'$  e  $\vec{\gamma}_1'$  tem a mesma direção pois são proporcionais. Os vetores  $\vec{\gamma}_2'$  e  $\vec{\gamma}_1'$  tem o mesmo sentido (sentido contrário) se, e somente se,  $g'(s) > 0$  ( $g'(s) < 0$ ).

**Definição 1.9.** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é chamada de *simples* quando seu traço não possui pontos de autocruzamento além, possivelmente, dos pontos na fronteira de  $I$ . Dito de outra forma, a aplicação  $\gamma$  é injetiva, ou seja,  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$  e  $t_1, t_2 \in [a, b[$  ou  $t_1, t_2 \in ]a, b]$ .

**Exemplo 1.7.** A curva mostrada na Figura 1.10, com parametrização

$$\gamma(t) = (\cos^3 \theta, \cos^2 \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.14)$$

não é uma curva simples.

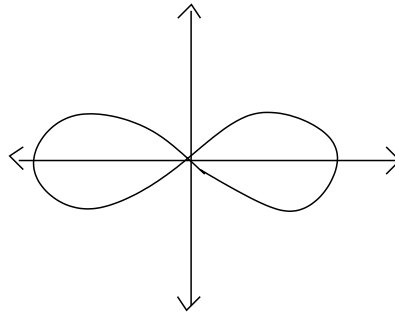


Figura 1.10

Por exemplo,  $\gamma(\frac{\pi}{2}) = \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0)$

**Definição 1.10.** Uma curva  $\gamma$  definida em  $[a, b]$  é fechada quando  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Exemplo 1.8.** A curva  $\gamma(t) = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]$  é fechada pois  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ . Seu traço é a circunferência de raio unitário mostrada na Figura 1.11.

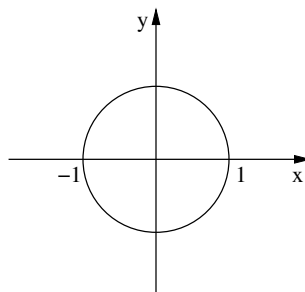


Figura 1.11

**Definição 1.11.** Uma curva  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é chamada de regular quando

- i)  $\gamma(t)$  é de classe  $C^1(I)$
- ii)  $|\gamma'(t)| \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

Uma curva  $\gamma$  que tem pontos onde  $\gamma' = 0$ , nesses pontos, a curva não tem reta tangente bem definida. Esse é o caso de curvas que apresentam pontos onde forma um ângulo ao longo do traço. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 1.9.** Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  onde  $x(t) = 2\sin^2(t)$  e  $y(t) = 2\sin^2(t)\tan(t)$ . Ver figura 1.12. Temos

$$|\gamma'(t)|^2 = x'^2 + y'^2 \quad (1.15)$$

onde

$$\begin{aligned} x'(t) &= 4\sin(t)\cos(t) \\ y'(t) &= 2\sin^2(t)\sec^2(t) + 4\sin(t)\cos(t)\tan(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

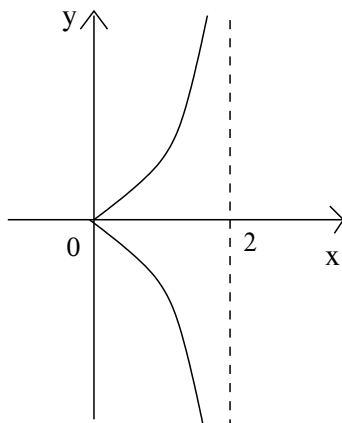


Figura 1.12

Em  $t = 0$ ,  $\gamma'(0) = 0$ . Portanto, a curva não é regular.

## 1.3 Campos Vetoriais

Outra classe importante de funções vetoriais é formada pelos campos vetoriais.

**Definição 1.12.** Consideremos a função vetorial  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Vamos interpretar  $F(x)$  como sendo a aplicação que associa em cada ponto  $x \in \Omega$  o vetor indicado por  $\vec{F}(x)$  com mesmas componentes de  $F(x)$ . O conjunto dos vetores  $\vec{F}(x)$  em  $\Omega$  é chamado de um campo vetorial.

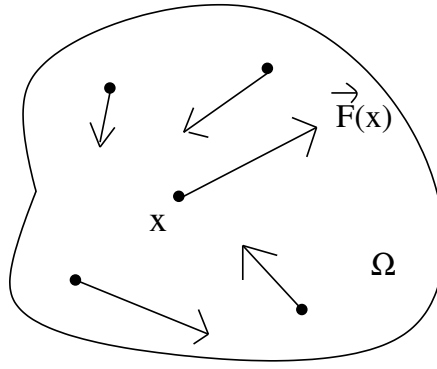


Figura 1.13

**Exemplo 1.10.** A função identidade  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $F(x) = x = (x_1, x_2)$ , é uma função vetorial que associa em cada ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  o vetor posição  $\vec{x}$  com coordenadas  $x_1, x_2$ . Portanto, o conjunto dos vetores  $\vec{x}$  é um campo vetorial.

**Exemplo 1.11.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  uma curva em  $\Omega$  e  $\vec{\gamma}(t)$  o vetor posição do ponto  $\gamma(t)$ . Ver Figura 1.14.

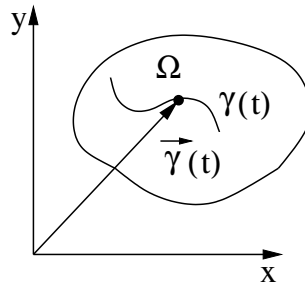


Figura 1.14

Pela definição de vetor,  $\vec{\gamma}(t)$  é equivalentemente dado pelo segmento orientado com origem no ponto  $\gamma(t) \in \Omega$ , com o mesmo sentido, direção e comprimento do vetor posição  $\vec{\gamma}(t)$ , como mostra a Figura 1.15:

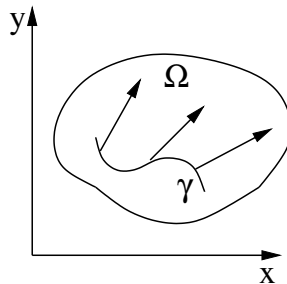


Figura 1.15

Dessa forma, o conjunto de vetores  $\vec{\gamma}(t), t \in I$ , com origem sobre  $\gamma$ , é um campo vetorial sobre a curva  $\gamma$ .

**Exemplo 1.12.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^1(I)$ . O conjunto dos vetores tangentes a  $\gamma$ , dados por  $\vec{F}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ , é um campo vetorial sobre a curva. Ver figura 1.16.

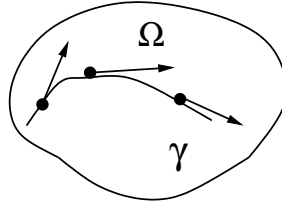


Figura 1.16

**Exemplo 1.13.** Considere o campo vetorial dado pela função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = (-y, x)$ . Em cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , a função  $F$  aplica o vetor

$$\vec{F}(x, y) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 \quad (1.17)$$

cuja norma é

$$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} \quad (1.18)$$

Tomando  $\|\vec{F}\| = c$ ,  $c$  constante, o campo vetorial sobre a circunferência de raio  $c$ , para cada  $c \in \mathbb{R}$ , é anti-horário, como mostra a Figura 1.17 pois, por exemplo, no primeiro quadrante,  $x > 0$  e  $y > 0$  e a componente de  $\vec{F}$  na direção  $\vec{e}_1$  é negativa e na de  $\vec{e}_2$  é positiva.

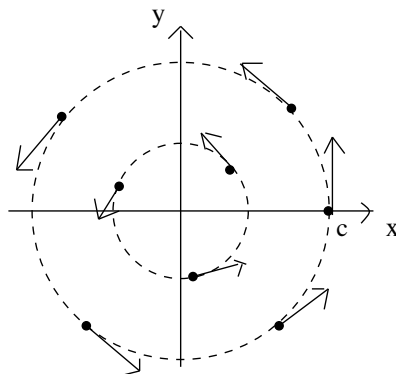


Figura 1.17

Em geral, neste trabalho serão considerados campos vetoriais bidimensionais. Contudo, mencionamos aqui dois exemplos importantes de campo vetorial em três dimensões: o campo gravitacional e o campo elétrico.

**Exemplo 1.14.** Suponha que um objeto com massa  $M$  esteja localizado na origem do  $\mathbb{R}^3$  - um exemplo seria  $M$  como a massa da Terra e a origem no seu centro. Seja  $\vec{r} = (x, y, z)$  o vetor posição com norma  $r = \|\vec{r}\|$  de outro objeto com massa  $m$  na posição  $\vec{r}$  e

$$\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad (1.19)$$

o vetor unitário com a direção e sentido de  $\vec{r}$ . Então, a força gravitacional devido a  $M$ , que é atrativa e atua sobre  $m$ , age no sentido da origem e é dada por

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{mMG}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \quad (1.20)$$

onde  $G$  é a constante universal da gravitação e  $r$  é a distância entre os objetos. A intensidade da força é igual à

$$\|\vec{F}\| = \frac{mMG}{r^2} \quad (1.21)$$

O campo vetorial  $\vec{F}$  é um exemplo de campo de força, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor a todo ponto  $\vec{r}$  do espaço que representa a força gravitacional exercida pela massa  $M$  sobre a massa  $m$  localizada no ponto  $\vec{r}$ .

Podemos ainda expressar o campo gravitacional em termos de suas funções componentes. Usando que  $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$  e  $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ :

$$F(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_1 + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_2 + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_3 \quad (1.22)$$



**Exemplo 1.15.** Seja  $Q$  uma carga elétrica localizada na origem. De acordo com a Lei de Coloumb, a força elétrica  $\vec{F}(x)$  exercida por essa carga sobre uma carga  $q$  localizada na posição  $\vec{r} = (x, y, z)$  é

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon q Q}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \quad (1.23)$$

com  $\varepsilon$  constante. Quando temos cargas de mesmo sinal  $qQ > 0$  e a força é repulsiva, já que  $\vec{F}$  tem o mesmo sentido de  $\vec{r}$ ; para cargas com sinais diferentes temos  $qQ < 0$  e a força é atrativa pois nesse caso  $\vec{F}$  tem o sentido contrário de  $\vec{r}$ . A Lei de Coloumb é outro exemplo de **campo de força**.

Geralmente os físicos consideram a força por unidade de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{q} \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \quad (1.24)$$

onde  $\vec{E}$  é um campo vetorial no  $\mathbb{R}^3$  chamado **campo elétrico** da carga  $Q$ .

# Capítulo 2

## Operadores Diferenciais

Neste capítulo são estudados os operadores gradiente, rotacional e divergente e algumas de suas propriedades.

### 2.1 Gradiente

**Definição 2.1.** *Seja  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função real definida no aberto  $\Omega$  do plano. Suponha que  $f$  é de classe  $C^1(\Omega)$ . O gradiente de  $f$  em coordenadas cartesianas é o campo vetorial indicado por  $\nabla f$  dado por*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 \quad (2.1)$$

*Em especial, o símbolo  $\nabla$ , que se expressa nas coordenadas cartesianas por*

$$\nabla := \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (2.2)$$

*é chamado de operador gradiente. Ele tem a propriedade de que, quando aplicado sobre uma função real que admite derivadas parciais, obtém-se um vetor dado por  $\nabla f$ .*

O gradiente de uma função, em outros sistemas de coordenadas, por exemplo, polares é diferente. Para uma definição intrínseca de gradiente ver o livro "Curso de Análise", vol 2, de Elon Lages Lima, Projeto Euclides.

**Exemplo 2.16.** Seja  $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ , definida no  $\mathbb{R}^2$ , uma função de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ . Podemos, então, calcular  $\nabla f$ :

$$\nabla f = 4x \vec{e}_1 + 4y \vec{e}_2 \quad (2.3)$$

Da mesma maneira, para  $g(x, y) = x + e^{y^2}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\nabla g = \vec{e}_1 + 2ye^{y^2}\vec{e}_2 \quad (2.4)$$

É imediato, a partir de (2.1), que as seguintes propriedades valem:

**Teorema 2.1.** *Sejam  $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aberto, funções de classe  $C^1(\Omega)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .*

*Então,*

- a)  $\alpha \nabla f = \nabla(\alpha f)$
- b)  $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
- c)  $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
- d)  $\nabla \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g^2} (g \nabla f - f \nabla g)$ , para  $g \neq 0$ .

**Prova:**

a)  $\alpha \nabla f = \nabla(\alpha f)$

$$\begin{aligned} \alpha \nabla f &= \alpha \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right) \\ &= \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 \\ &= \frac{\partial \alpha f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \alpha f}{\partial x_2} \vec{e}_2 = \nabla(\alpha f) \end{aligned}$$

b)  $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha f + \beta g) &= \frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_2} \vec{e}_2 \\ &= \left[ \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta g}{\partial x_1} \right] \vec{e}_1 + \left[ \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta g}{\partial x_2} \right] \vec{e}_2 \\ &= \alpha \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \vec{e}_1 + \alpha \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \vec{e}_2 + \beta \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \vec{e}_1 + \beta \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \vec{e}_2 \\ &= \alpha \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right] + \beta \left[ \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right] \\ &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g \end{aligned}$$

Os itens c) e d) também verificam-se facilmente.

**Definição 2.2.** *Seja  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real a 2 variáveis reais. Considere a equação*

$$f(x_1, x_2) = k \quad (2.5)$$

*onde  $k$  é uma constante real. O conjunto dos pontos  $(x_1, x_2)$  satisfazendo a equação (2.5) é chamado de curva de nível da função  $f$ .*

**Exemplo 2.17.** *Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Nesse caso, a equação*

$$x^2 + y^2 = k \quad (2.6)$$

*representa, para cada  $k > 0$ , uma curva no plano  $\mathbb{R}^2$ , que é uma circunferência de raio  $\sqrt{k}$ . Para cada  $k$ , essa circunferência é uma curva de nível da função dada.*

**Teorema 2.2.** *Seja  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real a duas variáveis reais de classe  $C^1(\Omega)$ . Seja  $P \in \Omega$  e suponha que  $P$  pertence a alguma curva de nível  $\gamma$  de  $f$ , suposta regular. Se  $\nabla f(P) \neq 0$ , então o vetor  $\nabla f(P)$  é normal a  $\gamma$  no ponto  $P$ .*

**Prova:** *Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  a curva de nível a qual  $P$  pertence. Então,*

$$f(\gamma(t)) = k \quad (2.7)$$

*para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Derivando em relação a  $t$ , pela regra da cadeia, obtemos:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

*Equivalentemente,*

$$\nabla f \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} = 0 \quad (2.9)$$

*Como  $\frac{d\vec{\gamma}}{dt}$  é um vetor tangente à curva  $\gamma$  e  $\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \neq 0$ , pois  $\vec{\gamma}$  é regular, por hipótese, e  $\nabla f \neq 0$ , também, temos que, em  $P$ ,  $\nabla f$  é perpendicular a  $\frac{d\vec{\gamma}}{dt}$ . Concluimos que  $\nabla f$  é normal à curva  $\vec{\gamma}$  em  $P$ .*

Do que foi acima exposto e, nas hipóteses do teorema 2.2, o gradiente de uma função  $f$  pode ser interpretado como uma aplicação que define um campo vetorial normal às curvas de nível da função.

**Definição 2.3.** Seja  $P \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto e uma direção em  $P$ , dada por um vetor unitário  $\vec{b}$ . Considere a reta que passa por  $P$  e contém  $\vec{b}$ , cuja equação é

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t, \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

onde  $\vec{a}$  é o vetor posição de  $P$ . Em componentes,

$$\vec{r}(t) = (a_1 + b_1t, a_2 + b_2t) \quad (2.11)$$

Seja  $f \in C^1(\Omega)$  a derivada direcional de  $f$ , na direção  $\vec{b}$ , em  $P$ , é a derivada da função  $f(\vec{r}(t))$ , em relação a  $t$ , em  $T = 0$ , que indica-se por  $\frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(P)$

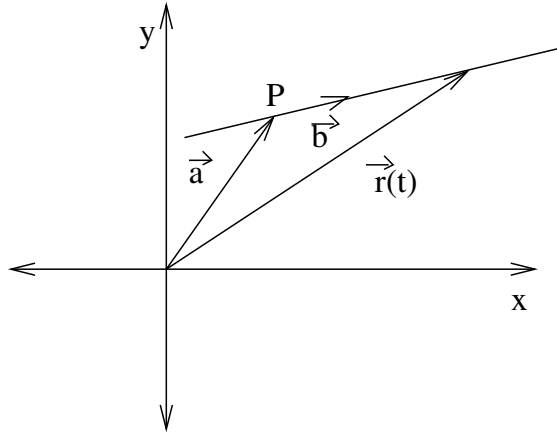


Figura 2.1

**Teorema 2.3.** Suponha que  $f(x, y)$  admite derivadas parciais. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f(P) \quad (2.12)$$

**Prova:** Aplicando a regra da cadeia à  $f(\vec{r}(t))$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(P) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r}(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $r_1 = a_1 + b_1t$  e  $r_2 = a_2 + b_2t$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(P) &= \frac{\partial f}{\partial r_1} b_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} b_2 \\ &= \vec{b} \cdot \nabla f(P) \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Teorema 2.4.** *Seja  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1(\Omega)$ . Então, em todo ponto  $P \in \Omega$  onde  $\nabla f \neq 0$ , a derivada direcional de  $f$  é máxima na direção do gradiente de  $f$ .*

**Prova:** Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f = \|\vec{b}\| \|\nabla f\| \cos\theta \quad (2.15)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{b}$  e  $\nabla f$ . Como  $\|\vec{b}\| = 1$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{b}} = \|\nabla f\| \cos\theta \quad (2.16)$$

Portanto,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{b}}$  é máxima quando  $\theta = 0$ , isto é, quando  $\vec{b}$  tem a mesma direção e sentido do vetor  $\nabla f$ .

Lembrando que as derivadas de uma função  $f$  são uma medida da taxa de variação de  $f$ , podemos concluir do resultado acima que a taxa de variação de  $f$  cresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor  $\nabla f$ .

## 2.2 Rotacional

Para definirmos o rotacional, nesta seção consideramos campos vetoriais no  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.4.** *Seja  $\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$  um campo vetorial em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  aberto. Suponha  $P$ ,  $Q$  e  $R$  funções de classe  $C^1(\Omega)$ . Chama-se **rotacional** de  $\vec{F}$  ao campo vetorial sobre  $\Omega$  definido por*

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \quad (2.17)$$

Podemos indicar o rotacional usando a notação de operador gradiente.

Pensando o operador gradiente  $\nabla$  como sendo um vetor com componentes  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ , podemos considerar o produto vetorial de  $\nabla$  pelo campo vetorial  $\vec{F}$  de modo que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &:= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \\
&= \text{rot} \vec{F}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Podemos escrever, então:

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \tag{2.19}$$

O rotacional tem as seguintes propriedades algébricas:

**Teorema 2.5.** *Sejam  $f, g$  funções vetoriais de classe  $C^1$  em algum domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Seja  $h$  de classe  $C^1$  uma função real com mesmo domínio. Então,*

- a)  $\text{rot}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha \text{rot} \vec{f} + \beta \text{rot} \vec{g}$
- b)  $h \text{rot} \vec{f} + \nabla h \times \vec{f} = \text{rot}(h \vec{f})$

**Prova:**

- a) Sejam  $f = P \vec{e}_1 + Q \vec{e}_2 + R \vec{e}_3$  e  $g = K \vec{e}_1 + L \vec{e}_2 + M \vec{e}_3$ , então:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) &= \text{rot}[\alpha(P \vec{e}_1 + Q \vec{e}_2 + R \vec{e}_3) + \beta(K \vec{e}_1 + L \vec{e}_2 + M \vec{e}_3)] \\
&= \text{rot}(\alpha P \vec{e}_1 + \alpha Q \vec{e}_2 + \alpha R \vec{e}_3 + \beta K \vec{e}_1 + \beta L \vec{e}_2 + \beta M \vec{e}_3) \\
&= \text{rot}[(\alpha P + \beta K) \vec{e}_1 + (\alpha Q + \beta L) \vec{e}_2 + (\alpha R + \beta M) \vec{e}_3] \\
&= \frac{\partial(\alpha R + \beta M)}{\partial y} \vec{e}_1 + \frac{\partial(\alpha P + \beta K)}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial(\alpha Q + \beta L)}{\partial x} \vec{e}_3 \\
&\quad - \frac{\partial(\alpha P + \beta K)}{\partial y} \vec{e}_3 - \frac{\partial(\alpha Q + \beta L)}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial(\alpha R + \beta M)}{\partial x} \vec{e}_2 \\
&= \alpha \frac{\partial R}{\partial y} \vec{e}_1 + \beta \frac{\partial M}{\partial y} \vec{e}_1 + \alpha \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_2 + \beta \frac{\partial K}{\partial z} \vec{e}_2 + \alpha \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{e}_3 + \beta \frac{\partial L}{\partial x} \vec{e}_3 \\
&\quad - \alpha \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_3 - \beta \frac{\partial K}{\partial y} \vec{e}_3 - \alpha \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{e}_1 - \beta \frac{\partial L}{\partial z} \vec{e}_1 - \alpha \frac{\partial R}{\partial x} \vec{e}_2 - \beta \frac{\partial M}{\partial x} \vec{e}_2 \\
&= \alpha \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \right] \\
&\quad + \beta \left[ \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \right] \\
&= \alpha \text{rot} \vec{f} + \beta \text{rot} \vec{g}
\end{aligned}$$

b) Seja  $f = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$

$$\begin{aligned}
h \operatorname{rot} \vec{f} + \nabla h \times \vec{f} &= h \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + h \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + h \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \\
&\quad + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial h}{\partial z} \vec{e}_3 \right) \times (P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3) \\
&= h \frac{\partial R}{\partial y} \vec{e}_1 - h \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{e}_1 + h \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_2 - h \frac{\partial R}{\partial x} \vec{e}_2 + h \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{e}_3 \\
&\quad - h \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_3 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} R - \frac{\partial h}{\partial z} Q \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} R - \frac{\partial h}{\partial z} Q \right) \vec{e}_1 \\
&\quad + \left( \frac{\partial h}{\partial z} P - \frac{\partial h}{\partial x} R \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} Q - \frac{\partial h}{\partial y} P \right) \vec{e}_3
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
h \operatorname{rot} \vec{f} + \nabla h \times \vec{f} &= \left( h \frac{\partial R}{\partial y} - h \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} R - \frac{\partial h}{\partial z} Q \right) \vec{e}_1 \\
&\quad + \left( h \frac{\partial P}{\partial z} - h \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} P - \frac{\partial h}{\partial x} R \right) \vec{e}_2 \\
&\quad + \left( h \frac{\partial Q}{\partial x} - h \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} Q - \frac{\partial h}{\partial y} P \right) \vec{e}_3 \\
&= \left( \frac{\partial(hR)}{\partial y} - \frac{\partial(hQ)}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial(hP)}{\partial z} - \frac{\partial(hR)}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial(hQ)}{\partial x} - \frac{\partial(hP)}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \\
&= \operatorname{rot}(h\vec{f})
\end{aligned}$$

**Exemplo 2.18.** Seja  $\vec{F}$  sendo  $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{e}_1 + xyz\vec{e}_2 - y^2\vec{e}_3$  um campo vetorial no  $\mathbb{R}^3$ . As derivadas parciais de  $\vec{F}$  existem de modo que podemos calcular  $\operatorname{rot} \vec{F}$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \left[ \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \vec{e}_1 - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \vec{e}_2 + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \vec{e}_3 \\
&= (-2y - xy)\vec{e}_1 - (0 - x)\vec{e}_2 + (yz - 0)\vec{e}_3 \\
&= -y(2 + x)\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + yz\vec{e}_3
\end{aligned}$$

O rotacional tem uma interpretação física interessante que será considerada nos seguintes exemplos:



**Exemplo 2.19.** (Significado de Rotacional) Suponha um fluido em rotação ao redor da origem no plano.

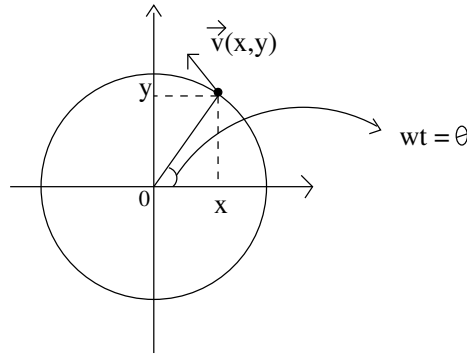


Figura 2.2

Seja  $\omega$  a velocidade angular do fluido, suposta constante. Portanto, o ângulo  $\theta(t)$ , no instante  $t$ , de uma partícula do fluido é  $\theta(t) = \omega \cdot t$ . As coordenadas  $(x, y)$  da partícula são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\omega t) \\ y &= r \sin(\omega t) \end{aligned}$$

onde  $r$  é a distância da mesma até a origem. Temos um campo vetorial de velocidades não angular dado por

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_2 \\ &= -r\omega \sin \omega t \vec{e}_1 + r\omega \cos \omega t \vec{e}_2 \\ &= -\omega y \vec{e}_1 + \omega x \vec{e}_2 \end{aligned}$$

onde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Suponha que o plano de escoamento do fluido é o plano  $XY \subset \mathbb{R}^3$ . Defina  $\vec{w} = w \vec{e}_3$ , o vetor velocidade de rotação. Seja  $\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2$  o vetor posição do ponto  $(x, y)$ . Vemos, então, que a velocidade  $\vec{v}$ , no ponto  $(x, y)$ , é igual a  $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$

Prosseguindo, vamos calcular  $\text{rot } \vec{v}$ . Pela definição de rotacional,

$$\begin{aligned}
rot \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -wy & wx & 0 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_3(\omega - (-\omega)) = 2\omega \vec{e}_3 = 2\vec{w}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{w} = \frac{1}{2} rot \vec{v} \quad (2.20)$$

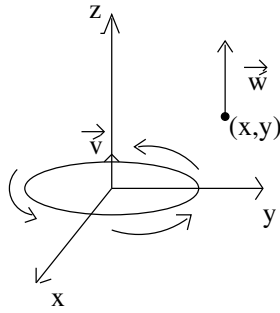


Figura 2.3

Percebemos, então, a relação direta entre o rotacional e a velocidade angular num escoamento. A ocorrência de um movimento de rotação de um fluido é assim descrita por um vetor rotacional não-nulo. Importante ressaltar que a recíproca não vale necessariamente, como ilustra o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.20.** Seja  $\vec{v} = \vec{e}_2 v_0 \exp\{\frac{-x^2}{\lambda^2}\}$  o campo de velocidade de um fluido no  $\mathbb{R}^2$ . Como mostra a figura, o fluido escoia na direção do eixo  $y$  sem apresentar qualquer movimento de rotação, ver figura 2.4 (a). No entanto, calculando o rotacional, obtemos:

$$rot \vec{v} = -\vec{e}_3 v_0 \frac{2x}{\lambda^2} e^{\frac{-x^2}{\lambda^2}} \neq 0$$

para  $x \neq 0$ .

Este resultado é um indicador de ocorrência potencial de movimento de rotação.

Vejamos como isso ocorre:

Considere um dínamo, um conjunto de quatro pás dispostas perpendicularmente entre si, como mostra a Figura 2.4 (b). Inserindo-o no fluido, como mostra a figura, este adquire um movimento de rotação horária ou anti-horária dependendo se ele está à

direita ou à esquerda do eixo  $y$ . No primeiro caso, a rotação horária é ocasionada pela velocidade do fluido que é maior sobre a pá esquerda do dínamo.

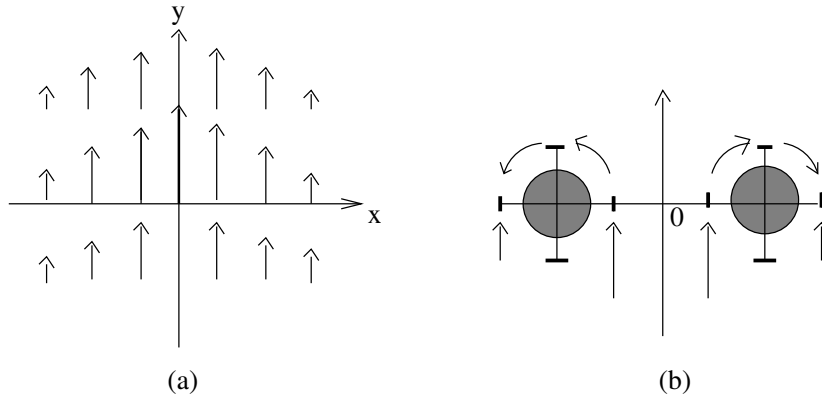


Figura 2.4

No outro caso, o movimento de rotação anti-horária é ocasionado pela velocidade do fluido que é maior sobre a pá direita do dínamo.

## 2.3 Divergência

**Definição 2.5.** Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$  definido no aberto  $\Omega$  e sejam  $f_1, f_2$  as funções coordenadas de  $\vec{F}$ . A divergência de  $\vec{F}$ , indicada por  $\text{div } \vec{F}$ , é a função real definida em  $\Omega$ , dada por

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (2.21)$$

A divergência de  $\vec{F}$  pode ser expressa pelo produto escalar do operador gradiente  $\nabla$  com  $\vec{F}$ :

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} \quad (2.22)$$

O divergente tem as seguintes propriedades algébricas:

**Teorema 2.6.** Sejam  $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  funções vetoriais de classe  $C^1$  e  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real também de classe  $C^1$ . Então, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

- a)  $\nabla \cdot (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \nabla \cdot \vec{F} + \beta \nabla \cdot \vec{G}$
- b)  $h \nabla \cdot \vec{F} + (\nabla h) \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (h \vec{F})$

**Prova:**

a) Seja:  $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + \dots + F_n \vec{e}_n$  e  $\vec{G} = G_1 \vec{e}_1 + \dots + G_n \vec{e}_n$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) &= \nabla \cdot (\alpha F_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha F_n \vec{e}_n + \beta G_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta G_n \vec{e}_n) \\
&= \nabla \cdot [(\alpha F_1 + \beta G_1) \vec{e}_1 + \dots + (\alpha F_n + \beta G_n) \vec{e}_n] \\
&= \text{div}[(\alpha F_1 + \beta G_1) \vec{e}_1 + \dots + (\alpha F_n + \beta G_n) \vec{e}_n] \\
&= \frac{\partial(\alpha F_1 + \beta G_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(\alpha F_n + \beta G_n)}{\partial x_n} \\
&= \frac{\partial(\alpha F_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\beta G_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(\alpha F_n)}{\partial x_n} + \frac{\partial(\beta G_n)}{\partial x_n} \\
&= \alpha \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \right] + \beta \left[ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \right] \\
&= \alpha \cdot \text{div} \vec{F} + \beta \cdot \text{div} \vec{G} \\
&= \alpha(\nabla \cdot \vec{F}) + \beta(\nabla \cdot \vec{G})
\end{aligned}$$

b) Seja:  $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + \dots + F_n \vec{e}_n$ . Então:

$$\begin{aligned}
h \nabla \cdot \vec{F} + (\nabla h) \cdot \vec{F} &= h(\text{div} \vec{F}) + (\nabla h) \cdot \vec{F} \\
&= h \left( \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \vec{F}_n}{\partial x_n} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} \vec{e}_n \right) \cdot (F_1 \vec{e}_1 + \dots + F_n \vec{e}_n) \\
&= \left( h \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_1} + \dots + h \frac{\partial \vec{F}_n}{\partial x_n} \right) + \left( F_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \dots + F_n \frac{\partial h}{\partial x_n} \vec{e}_n \right) \\
&= \left( h \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_1} + F_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) \vec{e}_1 + \dots + \left( h \frac{\partial \vec{F}_n}{\partial x_n} + F_n \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \vec{e}_n \\
&= \frac{\partial(h F_1)}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial(h F_n)}{\partial x_n} \vec{e}_n \\
&= \text{div}(h \vec{F}) = \nabla \cdot (h \vec{F})
\end{aligned}$$

**Teorema 2.7.** *Seja  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de classe  $C^2(\Omega)$ . Então,*

$$\text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad (2.23)$$

**Prova:** Como

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 \quad (2.24)$$

então

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \quad (2.25)$$

Observe que, usando o símbolo de gradiente (2.2), temos formalmente que

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.26)$$

Dessa forma, obtemos a seguinte representação

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f \quad (2.27)$$

onde  $\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla$  é chamado de operador de Laplace ou, simplesmente, Laplaciano. Outro símbolo para o Laplaciano é  $\Delta$ .

**Exemplo 2.21.** Vamos calcular  $\operatorname{div} \vec{F}$  sendo  $\vec{F}(x, y) = x\vec{e}_1 + xy\vec{e}_2$ , definido no  $\mathbb{R}^2$ .

Pela definição de divergência, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

**Teorema 2.8.** *Seja  $\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$  um campo vetorial no  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$ . Então*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0 \quad (2.28)$$

**Prova:** Usando as definições de divergência e rotacional e o teorema de Schwartz, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Anteriormente vimos que quando um campo vetorial admite derivadas parciais, podemos calcular o seu rotacional que é outro campo vetorial. É natural perguntar-se, agora, se um campo vetorial qualquer pode sempre ser obtido a partir do rotacional de algum outro campo vetorial. O operador divergente auxilia-nos a verificar que esse não é sempre o caso:

**Exemplo 2.22.** Mostraremos que o campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = x\vec{e}_1 + xy\vec{e}_2 - y^2\vec{e}_3$ ,  $x > -1$ ,  $y \in \mathbb{R}$  não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja,  $\vec{F} \neq \text{rot} \vec{G}$ .

De fato, do exemplo anterior, temos que

$$\text{div} \vec{F} = 1 + x$$

e, portanto,  $\text{div} \vec{F} \neq 0$ . Se fosse verdade que  $\vec{F} = \text{rot} \vec{G}$ , pelo teorema 2.8 teríamos:

$$\text{div} \vec{F} = \text{div}(\text{rot} \vec{G}) = 0 \tag{2.29}$$

o que contradiz  $\text{div} \vec{F} \neq 0$ . Portanto,  $\vec{F}$  não é o rotacional de outro campo vetorial.

Nos próximos capítulos, veremos aplicações importantes do divergente.

# Capítulo 3

## Linhas de Fluxo

### 3.1 Linhas de Fluxo

**Definição 3.1.** *Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial contínuo. Uma linha de fluxo de  $\vec{F}$  passando no ponto  $y \in \Omega$  é uma curva  $\gamma$  de classe  $C^1$  com a propriedade seguinte:*

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \quad (3.1)$$

$$\vec{\gamma}(t_0) = y \quad (3.2)$$

Lembrando que  $\vec{\gamma}'(t)$  é um vetor tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t)$ , a equação (3.1) diz que sobre uma linha de fluxo, o vetor  $\vec{\gamma}'(t)$  coincide com o vetor  $\vec{F}(\gamma(t))$  no ponto  $\gamma(t)$ . Portanto, em cada ponto  $\gamma(t)$  de uma linha de fluxo, o vetor  $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))$  é tangente à  $\gamma$  e coincide com  $\vec{\gamma}'(t)$ .

**Exemplo 3.23.** Seja  $\vec{F}(x, y) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e a curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Vamos verificar que  $\gamma$  é uma linha de fluxo do campo  $\vec{F}$ . De fato, temos que

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = (-\sin t, \cos t)$$

Tomando  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$  temos que

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = (-y(t), x(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) = \vec{F}(\gamma(t))$$

De forma equivalente, uma linha de fluxo passando no ponto  $y \in \Omega$  é uma solução da equação diferencial (3.1) satisfazendo a condição (3.2).

Dado  $\vec{F}$ , o problema de obter soluções da equação (3.1) satisfazendo a condição (3.2), chamada de condição inicial, é chamado problema de Cauchy. A existência e unicidade

de solução do problema de Cauchy é um problema matemático importante sobre o qual prova-se os seguintes resultados:

Consideremos o caso mais geral em que  $\vec{F}$  também depende de  $t$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função contínua no aberto  $\Omega$ . Então, para todo ponto  $(y, t_0) \in \Omega$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe um intervalo  $I$  que contém  $t_0$  tal que a equação*

$$\frac{df}{dt} = F(f, t) \quad (3.3)$$

*tem uma única solução  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(I)$  definida em  $I$ , satisfazendo a condição  $f(t_0) = y$ . A solução depende continuamente de  $t$ ,  $t_0$  e  $y$ , sendo também diferenciável em relação a estas variáveis.*

Para a prova desse teorema, ver [8].

**Exemplo 3.24.** Consideremos o caso simples

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= f \\ f(0) &= y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.4)$$

A função  $f(t) = ye^t$  é solução do problema. O teorema (3.1) garante que esta solução é a única possível, para cada  $y$ .

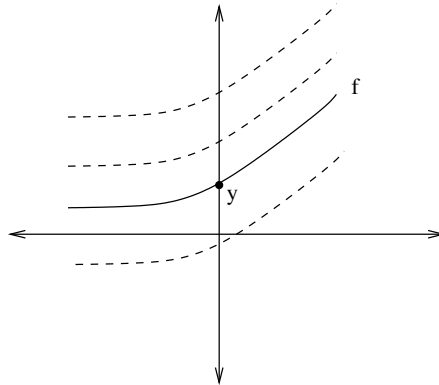


Figura 3.1

O teorema 3.1 afirma que a solução depende continuamente de  $y$ . Isso significa que se variarmos  $y$  continuamente, a solução, como função de  $y$ , varia continuamente.

Podemos, portanto, definir a função  $\phi(y; t)$  em duas variáveis que, para cada  $y$  fixado,  $\phi(y; t) = f(t)$ , ou seja,  $\phi$  é a função  $f(t)$  que, em  $t = 0$ , passa no ponto  $(0, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Daqui em diante  $t_0 = 0$ .



**Definição 3.2.** *Seja  $\phi(y, t)$  uma função que para cada  $y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  fornece a linha de fluxo de  $\vec{F}$  que passa pelo ponto  $y$  quando  $t = 0$ . A função  $\phi(y, t)$  é chamada de função fluxo do campo vetorial. Para cada  $y$ , a função fluxo é solução da equação (3.3). Pelo teorema 3.1 essa função depende continuamente de  $t$  e  $y$ .*

**Exemplo 3.25.** Seja  $\vec{F}(x, y) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , o campo vetorial considerado nos exemplos 1.13 e 3.23. Destes exemplos, está claro que as linhas de fluxo de  $\vec{F}$  são circunferências concêntricas com centro no ponto  $(0,0)$ . Vamos verificar que, nesse caso, o fluxo de  $\vec{F}$  é dado pela função

$$\phi(p; t) = (x(t), y(t)) \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t - b \sin t \\ y(t) &= a \sin t + b \cos t \end{aligned}$$

e  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Para  $t = 0$ ,  $\phi(p; 0) = (a, b) = p$ . É claro que, para cada ponto  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  fixado,  $\phi(p; t)$  representa a linha de fluxo  $\gamma_p(t) = (x(t), y(t))$  que passa pelo ponto  $p = (a, b)$  em  $t = 0$ .

De fato, fixado o ponto  $p = (a, b)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_p}{dt} &= (x'(t), y'(t)) \\ &= (-a \sin t - b \cos t, a \cos t - b \sin t) \\ &= (-y(t), x(t)) \\ &= \vec{F}(\gamma_p(t)) \end{aligned}$$

Comparando com o resultado do exemplo 3.23 vemos que a linha de fluxo lá obtida corresponde à  $\phi(1, 0; t) = (\cos t, \sin t)$ . Vamos mostrar, agora, que as demais linhas de fluxo de  $\vec{F}$  são circunferências concêntricas. Seja  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , qualquer. Temos que a linha de fluxo que passa por  $p$  em  $t = 0$  é

$$\gamma_p(t) = \phi(p; t) = (x(t), y(t)) \quad (3.6)$$

onde  $x(t) = a \cos t - b \sin t$  e  $y(t) = a \sin t + b \cos t$ . Essa linha de fluxo é uma circunferência de raio  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (a \cos t - b \sin t)^2 + (a \sin t + b \cos t)^2 \\
&= a^2 \cos^2 t - 2ab \cos t \sin t + b^2 \sin^2 t + a^2 \sin^2 t + 2ab \cos t \sin t + b^2 \cos^2 t \quad (3.7) \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Como  $a$  e  $b$  são fixos, temos que  $\gamma_p(t)$  é uma circunferência de raio  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Ver Figura 3.2

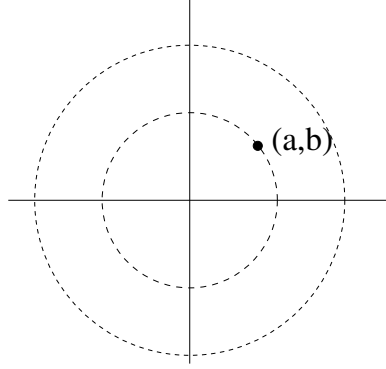


Figura 3.2

Como a solução do problema de Cauchy (soluções da equação (3.1) satisfazendo a equação (3.2)) depende continuamente de  $y \in \Omega$ , podemos reexpressar a equação (3.1) na forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(y, t) = \vec{F}(\phi(y, t), t) \quad (3.8)$$

onde  $\phi(y, t)$  representa a curva ou linha de fluxo  $\gamma_y(t)$  que passa pelo ponto  $y \in \Omega$  no instante  $t_0 = 0$ .

Denote por  $\phi_1(y, t)$  e  $\phi_2(y, t)$  as componentes de  $\phi(y, t)$ . Lembrando que para cada  $y$ ,  $\phi(y, t)$  é a linha de fluxo passando por  $y$  em  $t = 0$ , temos que  $\phi_1(y, t)$  e  $\phi_2(y, t)$  também são as componentes de  $\gamma_y(t)$ .

**Teorema 3.2.** *Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função no aberto  $\Omega$  de classe  $C^1(\Omega)$ . Seja  $\phi(y; t)$  a função fluxo de  $\vec{F}$ , isto é,  $\phi$  satisfaz (3.8). Seja  $J$  o determinante Jacobiano de  $\phi(y, t)$  relativo a  $y$ . Denotemos por  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  os pontos da linha de fluxo  $\phi(y, t)$  de sorte que  $x_1(t) = \phi_1(y, t)$  e  $x_2(t) = \phi_2(y, t)$ . Supondo  $\phi \in C^2$ , então, no ponto  $x(t) = \phi(y, t)$  da linha de fluxo,*

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \cdot \text{div} \vec{F} \quad (3.9)$$

**Prova:** Temos

$$J(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \quad (3.10)$$

Derivando em relação à  $t$ , obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t \partial y_2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t \partial y_1} \quad (3.11)$$

Como, por hipótese,  $\phi \in C^2$ , podemos aplicar o teorema de Schwartz:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t \partial y_j} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) \quad (3.12)$$

Em seguida, da equação (3.8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t \partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} (F_i(\phi(y, t), t)) \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\phi(y, t), t) \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Lembrando que  $x_k = \phi_k(y, t)$ , pois as coordenadas  $x_k$  são as coordenadas de um ponto da linha de fluxo  $\phi(y, t)$  que passa em  $y$  em  $t = 0$ , conclui-se:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t \partial y_j} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y, t) \quad (3.14)$$

Explicitamente:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(y, t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}(y, t) \quad (3.15)$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t \partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}(y, t) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}(y, t), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t \partial y_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(y, t) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}(y, t), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}(y, t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\phi(y, t), t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}(y, t) \quad (3.18)$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \right) \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \right) - \\ &\quad \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \right) \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \right) \\ &= A + B - C - D \end{aligned} \quad (3.19)$$

Mas

$$\begin{aligned} A - C &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \\ &\quad - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} J \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned} B - D &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \\ &\quad - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x_2} J \end{aligned} \quad (3.21)$$

Portanto, sobre cada linha de fluxo  $\gamma_y(t) = \phi(y, t)$  em  $\Omega$ , o Jacobiano satisfaz à equação

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \cdot (\operatorname{div} \vec{F}(\phi(y, t), t)) \quad (3.22)$$

cuja solução é da forma

$$J(t) = c \cdot \exp \int_0^t \operatorname{div} \vec{F}(\phi(y, s), s) ds \quad (3.23)$$

Para determinar a constante  $c$ , note que quando  $t = 0$ ,  $\phi(y, 0) = y$ , seguindo-se que

$$\phi_1(y, 0) = y_1 \quad e \quad \phi_2(y, 0) = y_2 \quad (3.24)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(y, 0) &= 1, & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}(y, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}(y, 0) &= 0, & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}(y, 0) &= 1\end{aligned}\tag{3.25}$$

implicando que

$$J(0) = 1\tag{3.26}$$

Tomando  $t = 0$  na (3.23), temos que

$$c = J(0) = 1\tag{3.27}$$

e

$$J(t; \phi(y, t)) = \exp \int_0^t \operatorname{div} \vec{F}(\phi(y, s), s) ds\tag{3.28}$$

Dos resultados acima segue que

$$J(t; \phi(y, t)) > 0\tag{3.29}$$

para todo  $t$ , ou seja,  $J$  é estritamente positivo.

Suponha que o campo vetorial  $\vec{F}$  satisfaz  $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$ . Então  $J(t) = 1$ , para todo  $t$ . Em especial, quando o campo não depende explícitamente de  $t$ ,

$$J(t) = \exp(t \cdot \operatorname{div} \vec{F})\tag{3.30}$$

Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1(\Omega)$ . Por cada ponto  $y \in \Omega$  passa uma única linha de fluxo dada pela função  $\phi(y; t)$ . Seja  $\phi_t$  a aplicação que associa a cada ponto  $y \in \Omega$ , o ponto  $\phi(y, t)$  da linha de fluxo que passa por  $y$  em  $t = 0$ .

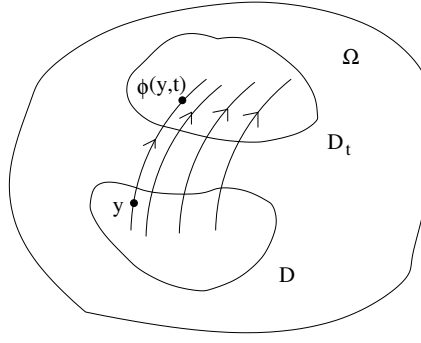


Figura 3.3

Seja  $D \subset \Omega$  uma região de  $\Omega$  e seja  $D_t := \phi_t(D)$  a região de  $\Omega$  obtida aplicando  $\gamma_t$  aos pontos de  $D$ . Denotemos por  $A(t)$  a área da região  $D_t$ . Temos que

$$A(t) = \int \int_{D_t} dx_1 dx_2 \quad (3.31)$$

Os pontos em  $D_t$  tem componentes

$$x_i = \phi_i((y_1, y_2), t) \quad (3.32)$$

Assumindo que as condições do teorema da mudança de coordenadas na integral dupla são satisfeitas, obtemos:

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 &= |J(t)| dy_1 dy_2 \\ &= J(t) dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

pois  $J > 0$ , para todo  $t$ . Portanto,

$$A(t) = \int \int_D J(t) dy_1 dy_2 \quad (3.34)$$

Derivando  $A(t)$  e aplicando o teorema 3.2,

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int \int_D \frac{\partial J}{\partial t} dy_1 dy_2 \\ &= \int \int_D J(t) \operatorname{div} \vec{F} dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

A partir deste último resultado podemos concluir o seguinte:

a) Se  $\text{div } \vec{F} = 0$  em  $\Omega$ , então  $A'(t) = 0$ . Isso significa que  $A(t) = A(0) = A(D)$  e não há variação na área.

b) Se  $\text{div } \vec{F} > 0$ , então, como  $J > 0$ , segue que  $A'(t) > 0$  para todo  $t$ . A área  $A(t)$  é crescente no parâmetro  $t$  e  $A(t) > A(0) = A(D)$ .

c) Se  $\text{div } \vec{F} < 0$  em  $\Omega$ , então, como  $J > 0$ , segue que  $A'(t) < 0$ , para todo  $t$ . A área  $A(t)$  decresce no parâmetro  $t$ , e  $A(t) < A(0) = A(D)$ .

**Exemplo 3.26.** (Equação da Continuidade)

Consideremos o escoamento de um fluido no plano. Suponha que o campo de velocidades seja dado por

$$\vec{v}(x, y; t) = v_1(x_1, y_1; t)\vec{e}_1 + v_2(x_2, y_2; t)\vec{e}_2 \quad (3.36)$$

uma função de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . Seja  $\rho(x, y; t)$  a densidade superficial de massa do fluido (massa por unidade de área), uma função de classe  $C^1$ . Seja  $M(t)$  a massa de fluido que no instante  $t$  ocupa a região  $D_t$ . Então,

$$M(t) = \int \int_{D_t} \rho(x_1, x_2; t) dx_1 dx_2 \quad (3.37)$$

Os pontos em  $D_t$  tem componentes

$$x_i = \phi_i((y_1, y_2), t) \quad (3.38)$$

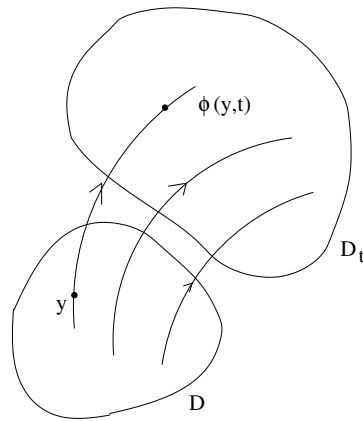


Figura 3.4

Procedendo como antes, obtemos

$$M(t) = \int \int_D \rho(\phi_1(y_1, y_2, t), \phi_2(y_1, y_2, t), t) J(t) dy_1 dy_2 \quad (3.39)$$

O escoamento do fluido da região  $D$  para a região  $D_t$  ocorre ao longo de linhas de fluxo. As partículas de fluido em  $D$ , no instante  $t = 0$ , estarão em  $D_t$  no instante  $t$ . Portanto, a massa total de fluido em  $D$  é a mesma que em  $D_t$ . Dessa forma, devemos ter

$$M'(t) = 0 \quad (3.40)$$

para todo  $t$ . Derivando ambos os lados de (3.39), obtemos

$$\int \int_{D_t} \left\{ \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho}{\partial \phi_i} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right] J(t) + \rho \frac{\partial J}{\partial t} \right\} dy_1 dy_2 = 0 \quad (3.41)$$

$\phi_1$  e  $\phi_2$  são as componentes da linha de fluxo  $\vec{\gamma}_y(t) = (\phi_1(y, t), \phi_2(y, t))$  de modo que  $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}$  são as componentes de  $\vec{\gamma}'_y(t)$ , que é um vetor tangente a  $\vec{\gamma}_y(t)$ . Esse vetor tangente é a velocidade, dada por  $\vec{v}(x, y, t)$ . Portanto, pela (3.38)

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho}{\partial \phi_i} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right] J + \rho \frac{\partial J}{\partial t} &= \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] J + \rho \frac{\partial J}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} \right) J + \rho J \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto,

$$\int \int_{D_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right] J dy_1 dy_2 = 0 \quad (3.43)$$

Pelo teorema 2.6 (b),

$$(\nabla \rho) \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (3.44)$$

Então,

$$\int \int_{D_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] J(t) dy_1 dy_2 = 0 \quad (3.45)$$

para todo  $t$ . Como  $J(t) > 0$ , segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.46)$$

Esta equação é chamada de *equação da continuidade*. Por esta equação,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}) \quad (3.47)$$



A partir desta equação podemos dizer que:

a) Se  $\text{div}(\rho \vec{v}) < 0$ , então  $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$  em  $D_t$ . Portanto, a densidade do fluido está crescendo com o tempo e a área  $A(D_t)$  está diminuindo. Isso significa que o fluido está sendo comprimido.

b) Se  $\text{div}(\rho \vec{v}) > 0$ , então  $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$  em  $D_t$ . A densidade do fluido está diminuindo com o tempo e a área  $A(D_t)$  está aumentando. Isso significa que o fluido está se expandindo com o tempo.

c) Se  $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ , então  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  em  $D_t$ . A densidade do fluido permanece constante ao longo do tempo e a área  $A(D_t) = A(D)$  também permanece constante.

Diz-se que um fluido é incompressível quando seu campo de velocidades satisfaz  $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ , ou equivalentemente, sua densidade não varia durante o escoamento.

# Capítulo 4

## *Integrais de Linha e Teoremas*

## *Integrais*

### 4.1 Integrais de Linha

**Definição 4.1.** *Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto, um campo vetorial contínuo, e uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , de classe  $C^1([a, b])$ . A integral*

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma := \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \quad (4.1)$$

*é chamada de integral de linha de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$ .*

Uma aplicação física importante da integral de linha é o trabalho de uma força ao longo de uma trajetória.

**Exemplo 4.27.** Vamos calcular  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ , sendo  $\vec{F}(x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  e  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Pela definição 4.1,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{-1}^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma' dt$$

Temos:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) &= \vec{F}(t, t^2) = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 \\ \gamma'(t) &= (1, 2t) \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma' = (t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2) \cdot (1, 2t) = t + 2t^3$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{-1}^1 (t + 2t^3) dt = 0$$

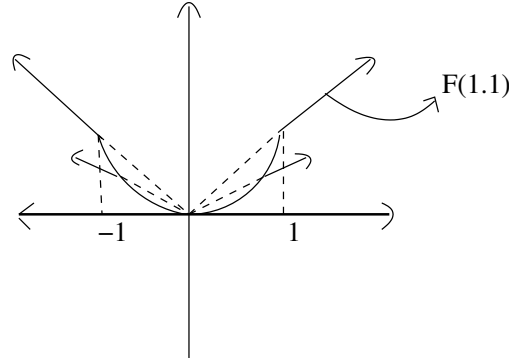


Figura 4.1

**Exemplo 4.28.** Seja  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_2$$

Então,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \vec{e}_1 + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \vec{e}_2 \right] \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

**Teorema 4.1.** *Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo no aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e sejam  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \Omega$  duas curvas de classe  $C^1$  em seus respectivos domínios. Suponha que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tem o mesmo traço em  $\Omega$ .*

a) *Se  $\gamma_2$  for obtida de  $\gamma_1$  por uma mudança de parâmetro que conserva a orientação de  $\gamma_1$ , ou seja,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tem a mesma orientação, então:*

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 \quad (4.2)$$

b) *Se  $\gamma_2$  for obtida de  $\gamma_1$  por uma mudança de parâmetro que reverte a orientação de  $\gamma_1$ , ou seja,  $\gamma_2$  tem a orientação contrária a de  $\gamma_1$ , então:*

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 \quad (4.3)$$

**Prova:**

a) Seja  $g$  a função mudança de parâmetro. Temos, nesse caso, que  $g'(s) > 0$  em todo  $s$  e  $g(c) = a$ ,  $g(d) = b$ .

Fazendo a mudança de variável  $t = g(s)$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 &= \int_a^b \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \vec{\gamma}_1'(t) dt \\ &= \int_{g(c)}^{g(d)} \vec{F}(\gamma_1(g(s))) \cdot \vec{\gamma}_1'(g(s)) \cdot dg(s) \\ &= \int_c^d \vec{F}(\gamma_1(g(s))) \cdot \gamma_1'(g(s)) \cdot \frac{dg}{ds} ds\end{aligned}\tag{4.4}$$

Mas como  $g$  é bijetora e de classe  $C^1$ , temos  $\gamma_1(g(s)) = \gamma_2(s)$ , ou ainda,  $\gamma_1(t) = \gamma_2(g^{-1}(t))$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_2}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}(\gamma_2(g^{-1}(t)))_{s=g^{-1}(t)} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_2(g^{-1}(t))) \Big|_{t=g(s)} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d\gamma_1(t)}{dt} \Big|_{t=g(s)} \frac{dg}{ds} = \gamma_1'(g(s)) \frac{dg}{ds}\end{aligned}\tag{4.5}$$

Assim,

$$\int_c^d \vec{F}(\gamma_1(g(s))) \cdot \gamma_1'(g(s)) \cdot \frac{dg}{ds} ds = \int_c^d \vec{F}(\gamma_2(g(s))) \cdot \gamma_2'(s) ds = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2\tag{4.6}$$

b) Nesse caso,  $g'(s) < 0$ ,  $g(c) = b$  e  $g(d) = a$ .

Temos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 &= \int_a^b \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \vec{\gamma}_1'(t) dt \\ &= \int_{g(d)}^{g(c)} \vec{F}(\gamma_1(g(s))) \cdot \gamma_1'(g(s)) dg(s) \\ &= \int_d^c \vec{F}(\gamma_1(g(s))) \cdot \gamma_1'(g(s)) \frac{dg}{ds} ds \\ &= - \int_c^d \vec{F}(\gamma_2(s)) \cdot \gamma_2'(s) ds = - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2\end{aligned}\tag{4.7}$$

Observação: Outra forma de expressar a integral de linha é a seguinte:

Seja

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{e}_1 + Q(x, y)\vec{e}_2 \quad (4.8)$$

e

$$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) \quad (4.9)$$

Então,

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)),$$

seguindo-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{\gamma} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt \\ &= \int_{\gamma} \left[ P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt \right] \\ &= \left[ \int_{\gamma} P(x(t), y(t)) dx(t) + Q(x(t), y(t)) dy(t) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Este último resultado justifica a seguinte notação, utilizada nas próximas seções, para a integral de linha:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

que deve ser entendida no sentido de (4.10).

## 4.2 Teoremas Integrais

### 4.2.1 Teorema de Green no plano

**Teorema 4.2.** *(de Green no plano) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto do  $\mathbb{R}^2$ , simplesmente conexo e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva de classe  $C^1([a, b])$  por partes, simples e fechada em  $\Omega$ , fronteira de uma região limitada e fechada  $K \subset \Omega$ , orientada no sentido anti-horário. Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  de classe  $C^1(\Omega)$ . Então,*

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \int \int_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy \quad (4.11)$$

A prova desse teorema será omitida. Ver [6].

**Exemplo 4.29.** Vamos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral

$$\oint_{\gamma} (x^4 - y^3)dx + (x^3 + y^5)dy$$

onde  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Temos que  $P(x, y) = x^4 - y^3$  e  $Q(x, y) = x^3 + y^5$  são de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ . A imagem de  $\gamma$  é a fronteira do círculo  $K$  dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$ , que está contido em  $\mathbb{R}^2$ . Pelo teorema de Green,

$$\oint_{\gamma} (x^4 - y^3)dx + (x^3 + y^5)dy = \int \int_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

onde  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$  e  $\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2$ ; logo,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (x^4 - y^3)dx + (x^3 + y^5)dy &= \int \int_K (3x^2 + 3y^2) dxdy \\ &= 3 \int \int_K (x^2 + y^2) dxdy \end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

de modo que

$$\begin{aligned} 3 \int \int_K (x^2 + y^2) dxdy &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta \\ &= 3 \left( \frac{2\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.30.** Vamos calcular a integral

$$I = \oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

onde  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . As funções  $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$  e  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  são de classe  $C^1$  no aberto  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . A região  $\Omega$  não é simplesmente conexa já

que o ponto  $(0, 0)$  está ausente. Assim, não podemos aplicar o Teorema de Green, já que as hipóteses do mesmo não são satisfeitas. A única maneira de calcularmos a integral é por cálculo direto, usando a definição de integral de linha. Temos que

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2\pi$$

o cálculo é idêntico ao do exemplo 4.28

### 4.2.2 Teorema de Stokes no plano

O teorema de Stokes no plano é a versão vetorial do Teorema de Green no plano.

**Teorema 4.3.** *(de Stokes no plano) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto do  $\mathbb{R}^2$ , simplesmente conexo, e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva de classe  $C^1([a, b])$  por partes, simples e fechada em  $\Omega$ , fronteira de uma região limitada e fechada  $K \subset \Omega$ , orientada no sentido anti-horário. Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , um campo vetorial de classe  $C^1(\Omega)$ . Então,*

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int \int_K \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \, dx dy \quad (4.12)$$

onde  $\vec{k}$  é um vetor unitário normal à  $\Omega$ .

**Prova:** Como  $\vec{F}$  é um campo vetorial plano, podemos, sem perda de generalidade, tomar  $\Omega$  contido no plano  $XY$  do  $\mathbb{R}^3$  e

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), 0) \quad (4.13)$$

Então,

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \oint_{\gamma} P dx + Q dy \quad (4.14)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} \quad (4.15)$$

Substituindo estes resultados no Teorema de Green, obtemos (4.12).

**Exemplo 4.31.** Seja  $\vec{v}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  o campo vetorial de velocidades de um fluido. Suponha  $\vec{v}$  é de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . Chama-se circulação do campo de velocidades no ponto  $P$  à integral de linha

$$C_P(\vec{v}) := \oint_{\gamma_P} \vec{v} \cdot d\vec{\gamma} \quad (4.16)$$

onde  $\gamma_P$  é uma curva fechada simples ao redor de  $P$  e orientada no sentido anti-horário. A circulação tem um significado físico que é o seguinte: Suponha que, sobre  $\gamma_P$ ,  $\vec{v}$  tem a mesma direção e sentido do vetor tangente a  $\gamma_P$ , isto é,  $\vec{v}(\gamma_P(t)) = c \cdot \vec{\gamma}'(t)$ ,  $c > 0$ . Nesse caso,

$$C_P(\vec{v}) = \oint_{\gamma_P} \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \frac{d\gamma}{dt} dt = c \oint_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\|^2 dt > 0 \quad (4.17)$$

Isso significa que as partículas do fluido sobre  $\gamma_P$  tem um movimento giratório no sentido anti-horário. O fluido tem um movimento de rotação ao redor de  $P$ , numa vizinhança de  $P$  que contém  $\gamma_P$ , pelo menos. Se  $\vec{v}(\gamma_P(t)) = c \vec{\gamma}'(t)$ ,  $c < 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ , então,

$$C_P(\vec{v}) = c \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\|^2 dt < 0 \quad (4.18)$$

Nesse caso, o fluido gira no sentido horário, sobre  $\vec{\gamma}_P(t)$

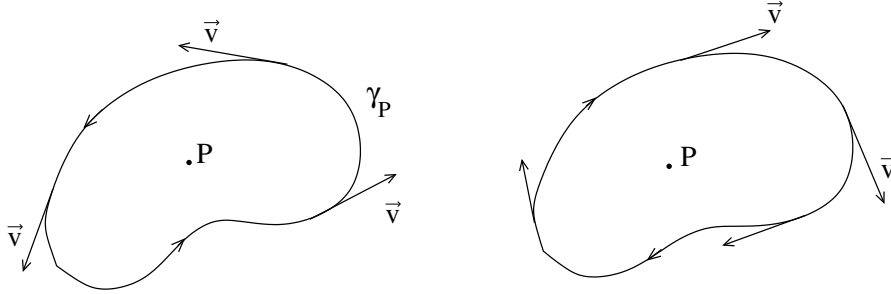


Figura 4.2

Quando  $\vec{v}$  é perpendicular à  $\gamma$ , em cada ponto, então  $\vec{v}(\gamma_P(t)) \cdot \vec{\gamma}' = 0$ . Nesse caso, a circulação é zero:

$$C_P(\vec{v}) = 0 \quad (4.19)$$

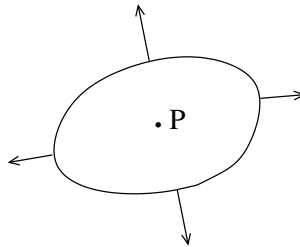


Figura 4.3

Aplicando o teorema de Stokes à circulação, obtemos

$$C_P(\vec{v}) = \int \int_K (\text{rot } \vec{v}) \cdot \vec{k} \, dx \, dy \quad (4.20)$$



onde  $K$  é a região do  $\mathbb{R}^2$  limitada e fechada pela curva  $\gamma_P$  e  $\vec{k}$  é um vetor unitário normal ao  $\mathbb{R}^2$ .

Quando  $\text{rot } \vec{v} = 0$ , tem-se  $C_P(\vec{v}) = 0$ . Por esta razão, o vetor  $\text{rot } \vec{v}$  é também chamado de *vetor de vorticidade*.

### 4.2.3 Teorema da Divergência (ou de Gauss) no plano

**Definição 4.2.** Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto, um campo vetorial contínuo. Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva de classe  $C^1$ , regular e injetora dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . A integral

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds := \int_a^b \left( \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{n}(\gamma(t)) \right) \cdot \|\vec{\gamma}'(t)\| dt, \quad (4.21)$$

onde

$$\vec{n}(\gamma(t)) := \frac{y'(t)\vec{e}_1 - x'(t)\vec{e}_2}{\|\gamma'(t)\|}, \quad (4.22)$$

é chamada de taxa de vazão ou fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  através de  $\gamma$ , na direção  $\vec{n}$ .

Seja  $\vec{k}$  um vetor unitário, normal a  $\Omega$ , e cujo sentido é o do leitor. O vetor  $\vec{n}(\gamma(t))$ , na definição 4.2, pode ser expresso na forma

$$\vec{n}(\gamma(t)) = \frac{\vec{\gamma}'(t) \times \vec{k}}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \quad (4.23)$$

O vetor  $\vec{\gamma}'(t) \times \vec{k}$  e, portanto,  $\vec{n}(\gamma(t))$ , é normal a  $\vec{\gamma}'(t)$  em cada ponto  $\vec{\gamma}(t)$  da curva, isto é,  $\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{n} = 0$ . Além disso, caminhando sobre a curva na orientação anti-horária, o sentido de  $\vec{n}$  é o do lado direito. Assim, se  $\gamma$  for uma curva fechada, orientada no sentido anti-horário,  $\vec{n}$  é a normal exterior à curva  $\gamma$ .

A diferencial  $ds$  é a diferencial da função comprimento de arco de  $\gamma(t)$  dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\theta)\| d\theta \quad (4.24)$$

Portanto,  $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ .

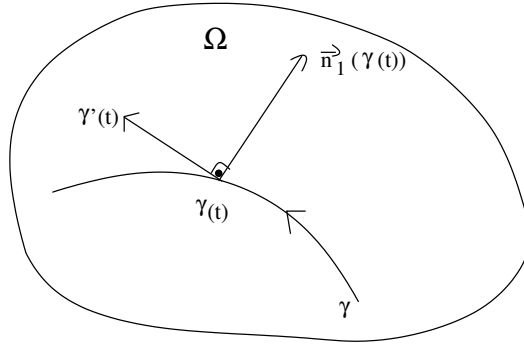


Figura 4.4

**Teorema 4.4.** *(da divergência no plano) Seja  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\Omega$  aberto do  $\mathbb{R}^2$ , simplesmente conexo, um campo vetorial de classe  $C^1(\Omega)$ , dado por  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ . Seja  $K$  um conjunto fechado e limitado contido em  $\Omega$ , de interior não-vazio, limitado por uma curva fechada  $\gamma(t)$ , regular, simples e de classe  $C^1$  com orientação anti-horária. Então:*

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int \int_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy \quad (4.25)$$

onde  $\vec{n}$  é dada por (4.22).

**Prova:** Temos, por (4.21) que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b \left( \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{n}(\gamma(t)) \right) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Mas, de acordo com (4.22):

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \left[ \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (y'(t)\vec{e}_1 - x'(t)\vec{e}_2) \right] \|\gamma'(t)\| dt$$

Segue que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_a^b [P(\gamma(t))y'(t) - Q(\gamma(t))x'(t)] dt \\ &= \oint_{\gamma} -Qdx + Pdy \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aplicando o Teorema de Green a este último resultado, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \oint -Qdx + Pdy \\
&= \int \int_K \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int \int_K \operatorname{div} \vec{F} dxdy
\end{aligned} \tag{4.27}$$

**Exemplo 4.32.** Seja  $\vec{F}(x, y) = y^3 \vec{e}_2$ . Vamos calcular a taxa de vazão de  $\vec{F}$  através da fronteira  $\gamma$  do retângulo  $1 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 2$ , sendo  $\vec{n}$  a normal exterior ao retângulo.

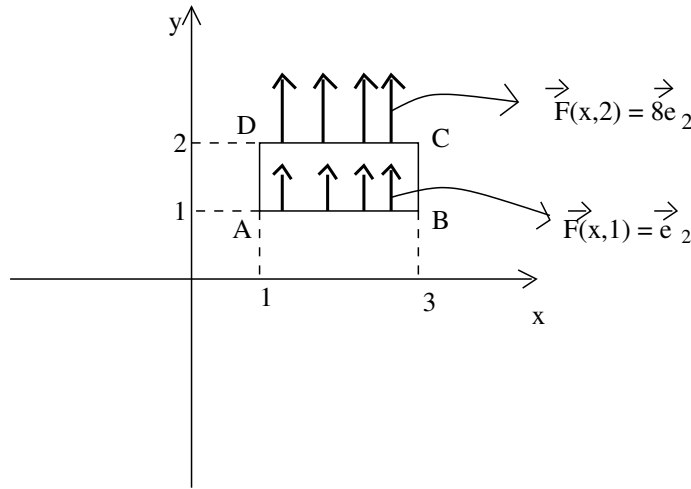


Figura 4.5

Aplicando o teorema da divergência:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int \int_K \operatorname{div} \vec{F} dxdy$$

sendo  $K$  o retângulo dado e  $\gamma$  sua fronteira orientada no sentido anti-horário e  $\vec{n}$  a normal exterior. Como  $\operatorname{div} \vec{F} = 3y^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_1^3 3y^2 x dxdy &= \int_1^2 3y^2 \Big|_1^3 dy \\
&= \int_1^2 9y^2 - 3y^2 dy \\
&= \int_1^2 6y^2 dy = \frac{6y^3}{3} \Big|_1^2 = 2(8) - 2 = 14
\end{aligned}$$

**Exemplo 4.33** Consideremos o escoamento de um fluido no  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\vec{v}$  o campo vetorial de velocidades do fluido e  $\vec{\gamma}$  uma curva contida na região do escoamento. Suponhamos  $\vec{v}$  e  $\vec{\gamma}$  funções de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . Nosso objetivo é calcular e interpretar fisicamente a taxa de vazão

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (4.28)$$

do fluido através de  $\gamma$ . Vamos fazê-lo na situação mais simples em que  $\vec{v}$  é constante e a curva  $\gamma$  é um segmento de reta de comprimento  $l(\gamma)$ . Suponha que  $\vec{v}$  e  $\vec{n}$  formam um ângulo menor que  $\frac{\pi}{2}$ . Nesse caso,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \vec{v} \cdot \vec{n} \int_{\gamma} ds \\ &= \vec{v} \cdot \vec{n} \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\ &= \vec{v} \cdot \vec{n} l(\gamma) \end{aligned} \quad (4.29)$$

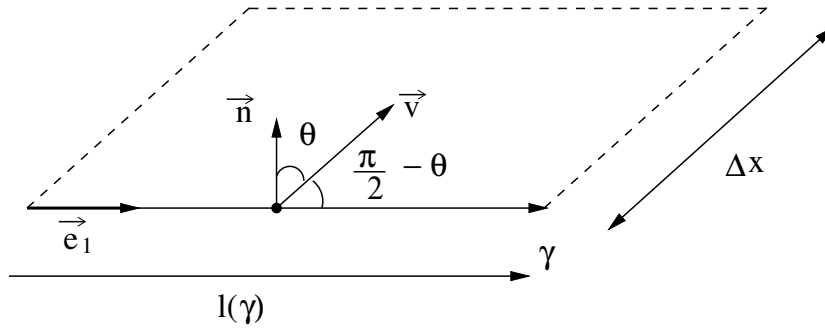


Figura 4.6

Suponha que o fluido tem densidade  $\rho = 1$  unidade de massa por unidade de área (por exemplo, 1 grama por centímetro quadrado). Então, lembrando que a densidade média de um fluido com massa  $M$  e que ocupa uma área  $A$  é

$$\rho = \frac{M}{A} \quad (4.30)$$

segue que, quando  $\rho = 1$ , temos  $M = A$ .

Sendo  $\vec{v}$  a velocidade do fluido, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , o fluido que atravessa  $\gamma$ , percorrerá uma área igual à do paralelogramo mostrado na figura 4.6.

Denotemos por  $\Delta x$  o comprimento lateral direita e esquerda do paralelogramo. Da definição de velocidade,

$$\|\vec{v}\| = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.31)$$

Tome  $\Delta t = 1$  unidade de tempo (por exemplo, 1 segundo). Então  $\Delta x = \|\vec{v}\|$ . Como  $\rho = 1$ , a massa de fluido que atravessa  $\gamma$  em  $\Delta t = 1$  segundo é igual à área do paralelogramo que é igual a

$$A = \|\Delta \vec{x} \times \vec{l}(\gamma)\| = \|\vec{v} \times \vec{l}(\gamma)\| \quad (4.32)$$

$\vec{l} = l\vec{e}_1$ . Então,

$$\begin{aligned} A &= \|\vec{v}\| l(\gamma) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \|\vec{v}\| l(\gamma) \cos(\theta) \\ &= \|\vec{v}\| \|\vec{n}\| \cos(\theta) l(\gamma) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{n} l(\gamma) \end{aligned}$$

Como  $\rho = 1$ , a massa total de fluido que escoa através de  $\gamma$  na unidade de tempo é

$$M = A = \vec{v} \cdot \vec{n} l(\gamma) \quad (4.33)$$

Essa é a interpretação física da taxa de vazão.

# Capítulo 5

## *Campos Conservativos*

### 5.1 Definição

**Definição 5.1.** Um campo vetorial  $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto, é chamado de conservativo quando existe uma função  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que

$$\vec{F}(x) = (\nabla\varphi)(x) \quad (5.1)$$

em todo  $x \in \Omega$ . A função  $\varphi$  é chamada de função potencial.

Observamos que a função  $\varphi$ , se existir, não é única. De fato,  $\nabla\psi = \vec{F}$  para  $\psi = \varphi + C$ , onde  $C$  é uma constante qualquer.

**Exemplo 5.34.** O campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_1 + \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_2 \quad (5.2)$$

definido em  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  é conservativo. De fato, seja  $\varphi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ . Temos que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (5.3)$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (5.4)$$

Portanto

$$\nabla\varphi = \vec{F} \quad (5.5)$$

**Teorema 5.1.** *Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto, de classe  $C^1(\Omega)$ , um campo vetorial conservativo. Então*

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad (5.6)$$

em  $\Omega$ . Um campo conservativo, por satisfazer (5.6) é chamado de irrotacional.

**Prova:** Escrevendo  $\vec{F}$  como

$$\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 \quad (5.7)$$

e supondo que  $\vec{F}$  é conservativo, existe  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla\varphi = \vec{F} \quad (5.8)$$

em  $\Omega$ . Portanto,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \quad (5.9)$$

em  $\Omega$ . Sendo  $\vec{F} \in C^1(\Omega)$ , então  $\varphi \in C^2(\Omega)$ . Portanto,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5.11)$$

Pelo Teorema de Schwartz,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \quad (5.12)$$

logo,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5.13)$$

em  $\Omega$ . Usando estes resultados na definição de rotacional de  $\vec{F}$  segue que

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad (5.14)$$

O teorema acima diz que uma condição necessária para que um campo vetorial seja conservativo é que o seu rotacional seja nulo. Desta maneira, se um campo vetorial é conservativo, então seu rotacional é nulo. Esta condição não é suficiente, no entanto. Existem exemplos de campos vetoriais  $\vec{F}$  satisfazendo  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , mas  $\vec{F}$  não é conservativo. Um

exemplo será dado na próxima seção.

**Exemplo 5.35** O campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \quad (5.15)$$

definido no plano  $XY \subset \mathbb{R}^3$  não é conservativo pois

$$\text{rot } \vec{F}(x, y) = 2\vec{e}_3 \neq 0 \quad (5.16)$$

## 5.2 Integral de Linha de um Campo Conservativo

**Teorema 5.2.** *Sejam  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto, um campo vetorial contínuo e conservativo,  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , função potencial para  $\vec{F}$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva de classe  $C^1([a, b])$ . Então*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma &= \int_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\gamma \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

**Prova:** Temos que

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi(\gamma(t))) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\varphi(\gamma(t))) dt \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (5.19)$$



**Exemplo 5.36.** O campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_2 \quad (5.20)$$

definido em  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  tem  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . No entanto,  $\vec{F}$  não é conservativo. Para ver isso, vamos calcular a integral de linha de  $\vec{F}$  sobre a curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , onde

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{aligned} \quad (5.21)$$

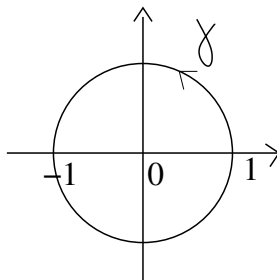


Figura 5.1

Temos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad (5.22)$$

Substituindo (5.21) na definição de  $\vec{F}$ , obtemos

$$\vec{F}(\gamma(t)) = -\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2 \quad (5.23)$$

Como

$$\gamma'(t) = -\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2 \quad (5.24)$$

Então,  $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 1$  e

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = 2\pi \quad (5.25)$$

Suponha, agora, que  $\vec{F}$  é conservativo e, portanto, existe  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla\varphi = \vec{F}$ . Nesse caso, pelo teorema 5.2:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma &= \int_{\gamma} (\nabla\varphi) \cdot d\gamma \\ &= \varphi(\gamma(2\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = 0\end{aligned}\tag{5.26}$$

pois sendo uma curva fechada,  $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$  e  $\varphi(\gamma(2\pi)) = \varphi(\gamma(0))$ . Este resultado contradiz o resultado (5.25). Portanto, não pode existir  $\varphi$  com a propriedade de que  $\nabla\varphi = \vec{F}$ . Desse modo,  $\vec{F}$  não pode ser conservativo.

Uma consequência importante do teorema 5.2 é que o valor da integral de linha de um campo vetorial conservativo  $\vec{F}$  não depende da curva  $\gamma$  que liga os pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , que são as extremidades de  $\gamma$ . Ou seja, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são duas curvas tais que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , então

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2\tag{5.27}$$

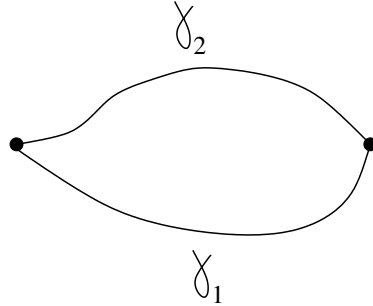


Figura 5.2

O valor da integral se conserva quando calculada sobre as curvas com as mesmas extremidades sendo esta uma das razões para chamar-se  $\vec{F}$  de campo conservativo.

Note que sendo  $\vec{F}$  um campo conservativo, o resultado (5.27) é equivalente à integral de linha de  $\vec{F}$  sobre uma curva fechada ser zero:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = 0\tag{5.28}$$

onde  $\gamma$  obtém-se percorrendo  $\gamma_2$  e, em seguida,  $\gamma_1$  no sentido contrário.

**Exemplo 5.37.** (Energia mecânica e campos de força conservativos) Consideremos uma partícula de massa  $m$ , que desloca-se numa região  $\Omega$  do espaço  $\mathbb{R}^2$  onde há um campo de forças  $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A partícula de massa  $m$  desloca-se de  $A$  até  $B$ , e sua trajetória é descrita pela curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , com  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ , com  $\vec{\gamma}(t)$  sendo o vetor posição da partícula no instante  $t$ . A energia cinética da partícula num dado instante  $t$  é, por definição,

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2 \quad (5.29)$$

onde  $\vec{v} = \vec{\gamma}'$  é a velocidade da partícula. Sejam  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  as velocidades da partícula nos instantes  $a$  e  $b$ , respectivamente. Vamos mostrar que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_A\|^2 \quad (5.30)$$

ou seja, a integral de linha de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  é igual à variação na energia cinética da partícula entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Da Física, sabemos que a aceleração  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  da partícula devido à ação da força  $\vec{F}$  no ponto  $\gamma(t)$  esta dada em termos desta por

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \quad (5.31)$$

Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt = \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt$$

Ou seja,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = m \int_a^b \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt$$

Mas

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt &= \frac{1}{2} [\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)]_a^b \\
&= \frac{1}{2} [\vec{v}(b) \cdot \vec{v}(b) - \vec{v}(a) \cdot \vec{v}(a)] \\
&= \frac{1}{2} [\|\vec{v}(b)\|^2 - \|\vec{v}(a)\|^2]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}(a)\|^2 \\
&= E_c(b) - E_c(a)
\end{aligned}$$

**Exemplo 5.38.** Seja  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de forças no aberto  $\Omega$ . Suponha  $\vec{F}$  contínuo e conservativo em  $\Omega$ . Então, existe uma função  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^1(\Omega)$ , tal que

$$(\nabla \varphi)(x) = \vec{F}(x) \quad (5.32)$$

em todo  $x \in \Omega$ . Suponha que uma partícula com massa  $m$  desloca-se em  $\Omega$  descrevendo uma curva  $\gamma$ . Suponha  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \Omega$  é de classe  $C^1(I)$  e que  $\vec{F}$  é a força resultante sobre a partícula. Suponha que no instante  $t_0$  a posição da partícula é  $\gamma(t_0)$ . Para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \varphi(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(t_0)) \quad (5.33)$$

pelo teorema 5.2.

Mas, pelo exemplo anterior,

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = E_c(t) - E_c(t_0) \quad (5.34)$$

onde

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) \quad (5.35)$$

é a energia cinética da partícula no instante  $t$ . Portanto,

$$E_c(t) - E_c(t_0) = \varphi(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(t_0)) \quad (5.36)$$

Defina

$$E_p(t) := -\varphi(\gamma(t)) \quad (5.37)$$

A função  $E_p(t)$  é chamada de energia potencial da partícula. Segue dos resultados acima que

$$E_c(t) + E_p(t) = E_p(t_0) + E_c(t_0) \quad (5.38)$$

Podemos concluir que a soma das energias cinética e potencial da partícula, em qualquer instante  $t$ , e, portanto, ao longo do deslocamento da partícula, permanece constante.

Dizemos então que a função

$$E(t) := E_c(t) + E_p(t) \quad (5.39)$$

chamada de energia mecânica da partícula, é uma constante do movimento:  $E(t) = E = \text{constante}$ , para todo  $t$ . O valor da energia  $E(t)$  se conserva ao longo do movimento sendo esta outra razão para chamar-se  $\vec{F}$  de um campo conservativo. Tem-se que  $\vec{F} = -\nabla E_p$

**Definição 5.2.** Um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é conexo por caminhos quando dado dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer de  $\Omega$  existe uma curva contínua ligando esses dois pontos.

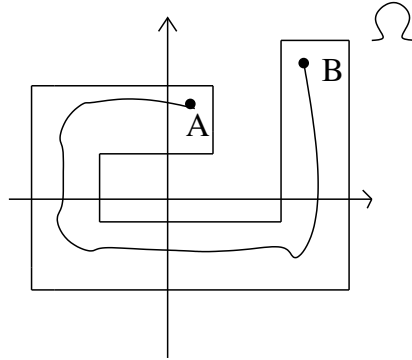


Figura 5.3

**Definição 5.3.** Sejam  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto,  $A, B$  dois pontos quaisquer de  $\Omega$ . Seja  $\mathcal{C}(A, B)$  o conjunto de todas as curvas de classe  $C^1$ , em  $\Omega$ , ligando  $A$  e  $B$ , isto é,

$$\mathcal{C}(A, B) = \{\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega, \gamma \in C^1 / \gamma(a) = A \text{ e } \gamma(b) = B\} \quad (5.40)$$

Diz-se que a integral de linha

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma \quad (5.41)$$

é independente do caminho  $\gamma$  de integração em  $\Omega$  quando o valor da integral é o mesmo,  $\forall \gamma \in \mathcal{C}(A, B)$ , e para quaisquer pontos  $A, B \in \Omega$ .

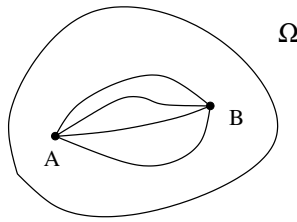


Figura 5.4

Anteriormente, vimos que um campo vetorial  $\vec{F}$  conservativo é independente do caminho de integração. O teorema seguinte prova que a recíproca também vale:

**Teorema 5.3.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto conexo por caminhos e  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial contínuo em  $\Omega$ . Suponha que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma \quad (5.42)$$

seja independente do caminho de integração em  $\Omega$ . Seja  $S \in \Omega$  e  $X \in \Omega$ , qualquer. Então, a função  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(x) = \int_S^X \vec{F} \cdot d\gamma, \quad (5.43)$$

onde a integral é a integral de linha sobre uma curva  $\gamma$  qualquer em  $\Omega$ , com extremidades em  $S$  e  $X$ , é uma função potencial para  $\vec{F}$ , isto é,

$$\nabla \varphi = \vec{F} \quad (5.44)$$

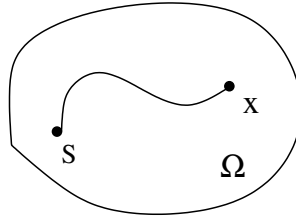


Figura 5.5

**Prova:** Seja  $\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2$ . Dado  $X = (x, y)$ , existe uma bola aberta de centro  $X$  contida em  $\Omega$ , pois  $\Omega$  é aberto. Seja  $h > 0$  de maneira que o segmento de extremidades  $X$  e  $X + h\vec{e}_1 = (x + h, y)$  esteja contido na bola.

Considere a curva formada por  $\gamma$  e o segmento de  $X$  a  $X + h\vec{e}_1$ . Seja  $\varphi(X + h\vec{e}_1)$  a função potencial calculada sobre esta nova curva. Então:

$$\varphi(X + h\vec{e}_1) = \int_S^X \vec{F} \cdot d\gamma + \int_X^{X+h\vec{e}_1} \vec{F} \cdot d\gamma \quad (5.45)$$

Portanto,

$$\varphi(X + h\vec{e}_1) - \varphi(X) = \int_X^{X+h\vec{e}_1} \vec{F} \cdot d\gamma \quad (5.46)$$

Seja  $\Gamma(t) = X + t\vec{e}_1$ ,  $t \in [0, h]$ , a curva ligando  $X$  a  $X + h\vec{e}_1$ . Então:

$$\int_X^{X+h\vec{e}_1} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^h \vec{F}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) dt \quad (5.47)$$

onde

$$\vec{F}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) = P(\Gamma(t)) \quad (5.48)$$

pois

$$\vec{F}(\Gamma(t)) = P(\Gamma(t))\vec{e}_1 + Q(\Gamma(t))\vec{e}_2 \quad (5.49)$$

e

$$\Gamma'(t) = \vec{e}_1 \quad (5.50)$$

Portanto,

$$\frac{\varphi(X + h\vec{e}_1) - \varphi(X)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h P(\Gamma(t)) dt \quad (5.51)$$

e,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(X + h\vec{e}_1) - \varphi(X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^h P(\Gamma(t)) dt}{h} \quad (5.52)$$

O limite pode ser calculado aplicando a regra de L'Hôpital. Obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^h P(\Gamma(t)) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} P(\Gamma(h))$$

Como  $\vec{F}$  é uma função contínua em  $\Omega$ , então suas componentes também o são. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} P(\gamma(h)) = P(\gamma(0)) = P(X)$$

De modo análogo, concluímos também que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$  em  $\Omega$ . Portanto,  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $\Omega$ .

**Teorema 5.4.** *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aberto e conexo por caminhos e  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial contínuo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\vec{F}$  é conservativo.
- (ii) Para toda curva fechada  $\gamma$  de classe  $C^1$  em  $\Omega$ , tem-se

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = 0 \quad (5.53)$$

- (iii) Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  duas curvas quaisquer em  $\Omega$  com as mesmas extremidades. Então

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 \quad (5.54)$$

**Prova:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Como  $\vec{F}$  é conservativo, existe  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $\Omega$ . Logo, se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  for fechada temos  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0 \quad (5.55)$$



(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Teorema provado anteriormente.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Suponha  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ . Como  $\gamma$  é fechada, temos que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Tomando dois caminhos quaisquer fechados em  $\Omega$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e definindo  $\gamma$  como a curva constituída por  $\gamma_1$  seguida por  $-\gamma_2$ . Então:

$$\begin{aligned} 0 = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma + \int_{-\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma \\ &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma \end{aligned} \quad (5.56)$$

Então

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma \quad (5.57)$$

Assim,  $\int \vec{F} \cdot d\gamma$  é independente do caminho.

**Teorema 5.5.** *Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^2$  e suponha que existe  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tal que para todo  $(x, y) \in \Omega$ , a poligonal dos vértices  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0, y)$  e  $(x, y)$  está em  $\Omega$*

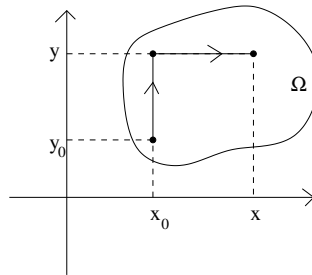


Figura 5.6

Seja

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{e}_1 + Q(x, y)\vec{e}_2 \quad (5.58)$$

um campo vetorial de classe  $C^1(\Omega)$ . Se  $\text{rot} \vec{F} = 0$  em  $\Omega$ , então  $\vec{F}$  é um campo conservativo.

**Prova:** Defina

$$\varphi(x, y) := \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x P(t, y) dt \quad (5.59)$$

para  $(x, y) \in \Omega$ .

Temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad (5.60)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = Q(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) dt \quad (5.61)$$

Como  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , então,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, y) \quad (5.62)$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= Q(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial t} dt \\ &= Q(x_0, y) + Q(x, y) - Q(x_0, y) \\ &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Portanto,  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $\Omega$ .

# Apêndice

**Funções de classe  $C^n$**  - A função é contínua e a sua primeira, segunda, ...,  $n$ -ésima derivada existe e também é contínua.

**Conjunto compacto no  $\mathbb{R}^n$**  - É um conjunto fechado e limitado.

**Conjunto compacto no  $\mathbb{R}^n$**  Um domínio  $D$  diz-se simplesmente conexo se qualquer curva fechada em  $D$  pode ser comprimida até se reduzir a um ponto sem abandonar  $D$ .

**Vizinhança** - Diz-se que o ponto  $a$  é interior ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando existe um número  $\varepsilon > 0$  tal que o intervalo aberto  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  está contido em  $X$ . O conjunto dos pontos interiores a  $X$  chama-se o *interior* do conjunto  $X$ . Quando  $a \in \text{int}X$  diz-se que o conjunto  $X$  é uma vizinhança do ponto  $a$ .

**Teorema de Schwartz** - Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto. Se  $f$  de classe  $C^2$  em  $A$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

**Teorema de Mudança de Variáveis na Integral Dupla** - Seja  $T : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aberto, de classe  $C^1(\Omega)$ . Suponha  $T$  é bijetora e tem jacobiano não nulo em  $\Omega$ . Suponha ainda que  $f$  seja contínua sobre  $\Omega$ . Então,

$$\int \int_T f(x, y) dx dy = \int \int_{T(\Omega)} f(T(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

**Simplesmente Conexos** - Um domínio  $D$  diz-se simplesmente conexo se qualquer curva fechada em  $D$  pode ser comprimida até se reduzir a um ponto sem abandonar  $D$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] FLEMMING, Diva M.; GONÇALVES, Miriam B. *Cálculo C*. Editora da UFSC, Florianópolis. 1987.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, vol. 2, 3<sup>a</sup> ed. 1998.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, vol. 3, 3<sup>a</sup> ed. 1998.
- [4] KAPLAN, Wilfred. *Cálculo avançado*. Edgard Blucher: Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.
- [5] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica*. Harbra Ltda, São Paulo, vol 2, 3<sup>a</sup> ed. 1994.
- [6] MARSDEN, J.; TROMBA, A. J. *Vector calculus*. W. H. Freeman and Company, New York, 3<sup>a</sup> ed. 1988.
- [7] STEWART, James. *Cálculo*. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, vol 2, 4<sup>a</sup> ed. 2004.
- [8] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Brasil) CNPq, Rio de Janeiro. 1979.